Sommes de variables aléatoires

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance

Exercice 1 : deux jetons tirés sans remise

Un sac contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire un jeton au hasard, puis un second parmi les trois restants. On note X le numéro du premier jeton, Y celui du second et $S = X + Y$. Les 12 issues sont équiprobables.

1. Construire un tableau à double entrée donnant la valeur de S pour chaque issue.
2. Donner la loi de S, puis calculer $E(S)$ à partir de cette loi.
3. Donner la loi de X et celle de Y (on pourra compter les issues dans le tableau), puis calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Vérifier que $E(S) = E(X) + E(Y)$. Les deux tirages sont-ils indépendants ? Pourquoi cela n'empêche-t-il pas cette égalité ?

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : la facture du garagiste

Lors d'une révision, le coût X des pièces et le coût Y de la main-d'œuvre, en euros, suivent les lois suivantes.

x	80	120	200
$P(X = x)$	$0{,}5$	$0{,}3$	$0{,}2$

y	60	90
$P(Y = y)$	$0{,}6$	$0{,}4$

La facture est $F = X + Y$.

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. En déduire $E(F)$. Pourquoi n'a-t-on pas besoin de la loi de F ?
3. Le garage accorde une remise de $10\,\%$ sur les pièces : la facture devient $F' = 0{,}9X + Y$. Calculer $E(F')$.
4. Sans remise, le garage effectue 150 révisions dans le mois. Quel chiffre d'affaires attendre ?

Leçon 2 : espérance et variance de aX + b

Exercice 3 : calculer sans la loi

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 12$ et $V(X) = 9$.

1. Donner $\sigma(X)$.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de $Y = 2X + 5$.
3. Même question pour $Z = 40 - 3X$.
4. Même question pour $T = \dfrac{X}{3}$.
5. Déterminer un réel $a > 0$ et un réel b tels que $W = aX + b$ ait pour espérance 0 et pour écart type 1.

Exercice 4 : augmenter les salaires

Dans une petite entreprise, le salaire mensuel X, en euros, d'un employé choisi au hasard suit la loi suivante.

x	1 800	2 000	2 600
$P(X = x)$	0,5	0,3	0,2

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à l'euro).
2. Proposition A : une hausse de $3\,\%$ pour tous, soit $A = 1{,}03\,X$. Calculer $E(A)$ et $\sigma(A)$ (arrondi à l'euro).
3. Proposition B : une prime de 60 euros par mois pour tous, soit $B = X + 60$. Calculer $E(B)$ et $\sigma(B)$ (arrondi à l'euro).
4. Les deux propositions coûtent presque autant à l'entreprise. Laquelle augmente les écarts de salaires ?

Une solution de Barrolech

Leçon 3 : variables indépendantes et variance d'une somme

Exercice 5 : réparer un téléphone

Dans un atelier, une réparation se fait en deux étapes, confiées à deux personnes différentes : un diagnostic de durée X et une intervention de durée Y, en minutes. On admet que X et Y sont indépendantes.

x	5	10	15
$P(X = x)$	0,2	0,5	0,3

y	20	30	40
$P(Y = y)$	0,3	0,4	0,3

La durée totale est $T = X + Y$.

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$, puis $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondi au centième).
2. Calculer $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$.
3. Comparer $\sigma(T)$ et $\sigma(X) + \sigma(Y)$.
4. Le prix de la réparation est $F = 1{,}5\,T + 10$, en euros. Calculer $E(F)$ et $\sigma(F)$.

Exercice 6 : additivité ou non

Partie A. On reprend les jetons de l'exercice 1.

Une solution de BarroTech

1. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
2. Calculer $V(S)$ à partir de la loi de S.
3. A-t-on $V(S) = V(X) + V(Y)$? Expliquer.

Partie B. Deux joueuses lancent chacune un dé équilibré à six faces. On note X et Y leurs résultats, indépendants, et $D = X - Y$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. En déduire $E(D)$, $V(D)$ et $\sigma(D)$ (arrondi au centième).

Leçon 4 : espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Exercice 7 : appliquer les formules

1. X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}3)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
2. Y suit la loi $\mathcal{B}(200\,;0{,}04)$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondi au centième).
3. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $E(Z) = 12$ et $V(Z) = 8{,}4$. Déterminer p, puis n.
4. X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $E(n - X) = n(1 - p)$ et $V(n - X) = np(1 - p)$ de deux façons : avec les formules de $aX + b$, puis avec la loi de $n - X$.

Exercice 8 : les tuiles du couvreur

Un couvreur reçoit un lot de 400 tuiles. Chaque tuile est fêlée avec la probabilité $0{,}02$, indépendamment des autres. On note X le nombre de tuiles fêlées.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Pour i de 1 à 400, on pose $X_i = 1$ si la tuile numéro i est fêlée, et $X_i = 0$ sinon. Écrire X à l'aide des X_i, puis redémontrer les formules de $E(X)$ et de $V(X)$ dans ce cas.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Remplacer les tuiles fêlées coûte 3 euros par tuile, plus 25 euros de livraison : $C = 3X + 25$. Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
5. Pour n fixé, pour quelle valeur de p la variance $np(1-p)$ est-elle la plus grande ? Quelle est alors sa valeur ?

Leçon 5 : échantillon d'une loi, somme et moyenne

Exercice 9 : des barquettes de framboises

La masse X, en grammes, d'une barquette de framboises suit la loi suivante.

x	245	250	255
$P(X = x)$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}3$

Un carton contient 16 barquettes, dont les masses forment un échantillon de cette loi.

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la masse totale S_{16}.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la masse moyenne M_{16}.
4. Calculer $\sigma(M_{100})$.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5$.

Exercice 10 : mesurer plusieurs fois

Une géomètre mesure une distance avec un télémètre. Une mesure est modélisée par une variable d'espérance d, la vraie distance, et d'écart type 6 millimètres. Elle effectue n mesures indépendantes, et note S_n leur somme et M_n leur moyenne.

1. Exprimer $E(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de d et de n.
2. Calculer $\sigma(M_4)$ et $\sigma(M_9)$.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 1{,}5$ millimètre.
4. Combien de mesures faut-il pour diviser par 10 l'écart type d'une mesure seule ?
5. Un collègue affirme : « Plus on fait de mesures, plus la somme est dispersée, donc moins la moyenne est fiable. » Le premier constat est-il exact ? La conclusion l'est-elle ?

Leçon 6 : décomposer une variable en somme

Exercice 11 : trois détecteurs de fumée

Une maison est équipée de trois détecteurs de fumée. En cas de fumée, ils se déclenchent avec les probabilités $0{,}9$, $0{,}8$ et $0{,}7$, indépendamment les uns des autres. On note X le nombre de détecteurs qui se déclenchent.

1. Pourquoi X ne suit-il pas une loi binomiale ?
2. Écrire X comme une somme de trois variables simples, puis calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
4. Y suit la loi $\mathcal{B}(3\,;0{,}8)$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$, puis comparer avec X.
5. Calculer la probabilité qu'au moins un détecteur se déclenche.

Exercice 12 : compter sans la loi

Partie A. Une pâtissière dépose au hasard 10 pépites de chocolat sur 5 cookies : chaque pépite tombe sur l'un des cinq, avec la même probabilité, indépendamment des autres. On note X le nombre de cookies sans pépite. Pour i de 1 à 5, on pose $X_i = 1$ si le cookie numéro i n'a aucune pépite, et $X_i = 0$ sinon.

1. Calculer $P(X_i = 1)$.
2. En déduire $E(X)$ (arrondi au millième).
3. Les X_i sont-elles indépendantes ? Peut-on obtenir $V(X)$ en additionnant les $V(X_i)$?

Partie B. Dans une classe de 30 élèves, on admet que les jours de naissance sont indépendants et que chacun des 365 jours de l'année a la même probabilité. On note N le nombre de paires d'élèves nés le même jour.

1. Combien y a-t-il de paires d'élèves ?
2. Quelle est la probabilité que deux élèves donnés soient nés le même jour ?
3. En écrivant N comme une somme de variables qui valent 1 ou 0, calculer $E(N)$ (arrondi au centième).