Sommes de variables aléatoires

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. Chaque case donne $S = x + y$; les cases $x = y$ sont impossibles, car le premier jeton n'est pas remis.

$x \setminus y$	1	2	3	4
1		3	4	5
2	3		5	6
3	4	5		7
4	5	6	7	

2. On compte les cases, chacune de probabilité $\frac{1}{12}$:

s	3	4	5	6	7
$P(S = s)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

Une solution de BarroTech

$$E(S) = \frac{3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 2 + 7 \times 2}{12} = \frac{60}{12} = 5.$$

3. Dans chaque ligne et dans chaque colonne, il y a 3 cases sur 12 : X et Y prennent chacune les valeurs 1, 2, 3, 4 avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Donc $E(X) = E(Y) = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$.
4. $E(X) + E(Y) = 2{,}5 + 2{,}5 = 5 = E(S)$. Les tirages ne sont pas indépendants : par exemple, $P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 0$, alors que $P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{16}$. Cela n'empêche pas l'égalité : la linéarité de l'espérance vaut pour toutes les variables.

Exercice 2

1. $E(X) = 80 \times 0{,}5 + 120 \times 0{,}3 + 200 \times 0{,}2 = 40 + 36 + 40 = 116$. $E(Y) = 60 \times 0{,}6 + 90 \times 0{,}4 = 36 + 36 = 72$.
2. Par linéarité, $E(F) = 116 + 72 = 188$ euros. La linéarité donne directement l'espérance d'une somme, sans la loi de la somme et sans savoir si X et Y sont indépendantes.
3. $E(F') = 0{,}9 \times 116 + 72 = 104{,}4 + 72 = 176{,}4$ euros.
4. Par linéarité, pour 150 révisions : $150 \times 188 = 28\,200$ euros.

Exercice 3

1. $\sigma(X) = \sqrt{9} = 3$.
2. $E(Y) = 2 \times 12 + 5 = 29$; $V(Y) = 2^2 \times 9 = 36$; $\sigma(Y) = 2 \times 3 = 6$.
3. $Z = -3X + 40$: $E(Z) = -3 \times 12 + 40 = 4$; $V(Z) = (-3)^2 \times 9 = 81$; $\sigma(Z) = |-3| \times 3 = 9$.
4. $T = \dfrac{1}{3}X$: $E(T) = 4$; $V(T) = \dfrac{1}{9} \times 9 = 1$; $\sigma(T) = 1$.
5. $\sigma(W) = a \times 3 = 1$ donne $a = \dfrac{1}{3}$. $E(W) = \dfrac{1}{3} \times 12 + b = 4 + b = 0$ donne $b = -4$. Ainsi $W = \dfrac{X - 12}{3}$.

Exercice 4

1. $E(X) = 900 + 600 + 520 = 2\,020$. $V(X) = 0{,}5 \times 220^2 + 0{,}3 \times 20^2 + 0{,}2 \times 580^2 = 24\,200 + 120 + 67\,280 = 91\,600$. $\sigma(X) = \sqrt{91\,600} \approx 303$ euros.
2. $E(A) = 1{,}03 \times 2\,020 = 2\,080{,}6$ euros ; $\sigma(A) = 1{,}03 \times \sigma(X) \approx 312$ euros.
3. $E(B) = 2\,020 + 60 = 2\,080$ euros ; $\sigma(B) = \sigma(X) \approx 303$ euros : ajouter une constante ne change pas l'écart type.
4. La proposition A multiplie les salaires, donc les écarts à la moyenne : elle augmente les écarts de salaires. La proposition B les laisse inchangés.

Une solution de BarroTech

Exercice 5

1. $E(X) = 1 + 5 + 4{,}5 = 10{,}5$; $V(X) = 0{,}2 \times 5{,}5^2 + 0{,}5 \times 0{,}5^2 + 0{,}3 \times 4{,}5^2 = 12{,}25$; $\sigma(X) = 3{,}5$. $E(Y) = 6 + 12 + 12 = 30$; $V(Y) = 0{,}3 \times 10^2 + 0 + 0{,}3 \times 10^2 = 60$; $\sigma(Y) = \sqrt{60} \approx 7{,}75$.
2. $E(T) = 10{,}5 + 30 = 40{,}5$ minutes. Comme X et Y sont indépendantes, $V(T) = 12{,}25 + 60 = 72{,}25$, d'où $\sigma(T) = 8{,}5$ minutes.
3. $\sigma(X) + \sigma(Y) \approx 3{,}5 + 7{,}75 = 11{,}25$, nettement plus que $\sigma(T) = 8{,}5$: les écarts types ne s'additionnent pas.
4. $E(F) = 1{,}5 \times 40{,}5 + 10 = 70{,}75$ euros ; $\sigma(F) = 1{,}5 \times 8{,}5 = 12{,}75$ euros.

Exercice 6

Partie A.

1. $E(X) = 2{,}5$ et $V(X) = \dfrac{1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2}{4} = 1{,}25$. De même, $V(Y) = 1{,}25$.
2. $E(S) = 5$, donc $V(S) = \dfrac{2 \times 2^2 + 2 \times 1^2 + 4 \times 0^2 + 2 \times 1^2 + 2 \times 2^2}{12} = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3}$.
3. $V(X) + V(Y) = 2{,}5$ et $V(S) = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$: l'égalité est fausse. Ce n'est pas une contradiction : X et Y ne sont pas indépendantes.

Partie B.

1. $E(X) = 3{,}5$ et $V(X) = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} - 3{,}5^2 = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{35}{12}$.
2. $E(D) = E(X) - E(Y) = 0$. X et Y sont indépendantes, donc $V(D) = V(X) + V(Y) = \dfrac{35}{6}$, et $\sigma(D) \approx 2{,}42$.

Exercice 7

1. $E(X) = 50 \times 0{,}3 = 15$; $V(X) = 15 \times 0{,}7 = 10{,}5$; $\sigma(X) \approx 3{,}24$.
2. $E(Y) = 200 \times 0{,}04 = 8$; $V(Y) = 8 \times 0{,}96 = 7{,}68$; $\sigma(Y) \approx 2{,}77$.
3. $\dfrac{V(Z)}{E(Z)} = 1 - p = \dfrac{8{,}4}{12} = 0{,}7$, donc $p = 0{,}3$. Puis $n = \dfrac{12}{0{,}3} = 40$.
4. *Première façon.* Avec $a = -1$ et $b = n$: $E(n - X) = n - np = n(1-p)$ et $V(n - X) = (-1)^2\, V(X) = np(1-p)$. *Seconde façon.* $n - X$ est le nombre d'échecs : il suit la loi $\mathcal{B}(n, 1-p)$. Son espérance vaut $n(1-p)$ et sa variance $n(1-p)\big(1-(1-p)\big) = np(1-p)$.

Exercice 8

1. On répète 400 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli (succès : « la tuile est fêlée », $p = 0{,}02$), et X compte les succès : X suit la loi $\mathcal{B}(400\,;0{,}02)$.
2. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}$. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}02$: $E(X_i) = 0{,}02$ et $V(X_i) = 0{,}02 \times 0{,}98$. Par linéarité, $E(X) = 400 \times 0{,}02$. Chaque X_i ne dépend que de la tuile numéro i et les épreuves sont indépendantes : par additivité, $V(X) = 400 \times 0{,}02 \times 0{,}98$.
3. $E(X) = 8$; $V(X) = 7{,}84$; $\sigma(X) = 2{,}8$.
4. $E(C) = 3 \times 8 + 25 = 49$ euros ; $\sigma(C) = 3 \times 2{,}8 = 8{,}4$ euros.
5. $f(p) = np(1-p) = n(p - p^2)$ a pour dérivée $f'(p) = n(1-2p)$, positive sur $\left[0\,;\tfrac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[\tfrac{1}{2}\,;1\right]$. Le maximum est atteint pour $p = \dfrac{1}{2}$, et il vaut $\dfrac{n}{4}$.

Exercice 9

1. $E(X) = 49 + 125 + 76{,}5 = 250{,}5$ grammes ; $V(X) = 0{,}2 \times 5{,}5^2 + 0{,}5 \times 0{,}5^2 + 0{,}3 \times 4{,}5^2 = 12{,}25$; $\sigma(X) = 3{,}5$ grammes.
2. $E(S_{16}) = 16 \times 250{,}5 = 4\,008$ grammes ; $V(S_{16}) = 16 \times 12{,}25 = 196$; $\sigma(S_{16}) = \sqrt{196} = 14$ grammes, c'est-à-dire $\sqrt{16} \times 3{,}5$.
3. $E(M_{16}) = 250{,}5$ grammes ; $V(M_{16}) = \dfrac{12{,}25}{16} = 0{,}765\,625$; $\sigma(M_{16}) = \dfrac{3{,}5}{4} = 0{,}875$ gramme.
4. $\sigma(M_{100}) = \dfrac{3{,}5}{10} = 0{,}35$ gramme.
5. $\dfrac{3{,}5}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}5 \iff \sqrt{n} \geqslant 7 \iff n \geqslant 49$. Le plus petit entier est 49.

Exercice 10

1. $E(M_n) = d$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{6}{\sqrt{n}}$.
2. $\sigma(M_4) = \dfrac{6}{2} = 3$ millimètres et $\sigma(M_9) = \dfrac{6}{3} = 2$ millimètres.
3. $\dfrac{6}{\sqrt{n}} \leqslant 1{,}5 \iff \sqrt{n} \geqslant 4 \iff n \geqslant 16$. Le plus petit entier est 16.
4. $\dfrac{6}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{10}$ donne $\sqrt{n} = 10$, soit $n = 100$ mesures.
5. Le constat est exact : $\sigma(S_n) = 6\sqrt{n}$ augmente avec n. La conclusion est fausse : la moyenne divise la somme par n, et $\sigma(M_n) = \dfrac{6}{\sqrt{n}}$ diminue quand n augmente.

Une solution de BarroTech

Exercice 11

1. Les trois épreuves n'ont pas la même probabilité de succès.
2. $X = X_1 + X_2 + X_3$, où $X_i = 1$ si le détecteur numéro i se déclenche, et 0 sinon. Par linéarité, $E(X) = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 = 2{,}4$.
3. Les X_i sont indépendantes : $V(X) = 0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}21 = 0{,}46$, et $\sigma(X) \approx 0{,}68$.
4. $E(Y) = 3 \times 0{,}8 = 2{,}4$ et $V(Y) = 2{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}48$. Les deux variables ont la même espérance, et X est un peu moins dispersée.
5. L'événement contraire est « aucun ne se déclenche », de probabilité $0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}006$. La probabilité cherchée est $0{,}994$.

Exercice 12

Partie A.

1. Le cookie i reste sans pépite si chacune des 10 pépites tombe ailleurs, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{4}{5}$ pour chacune, de façon indépendante : $P(X_i = 1) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0{,}107$.
2. $X = X_1 + \cdots + X_5$ et, par linéarité, $E(X) = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0{,}537$.
3. Non : si quatre cookies sont sans pépite, le cinquième en a forcément. Les X_i ne sont pas indépendantes : on ne peut pas additionner les variances.

Partie B.

1. $\binom{30}{2} = 435$ paires (chapitre 6).
2. Le premier élève a un jour de naissance quelconque, le second tombe le même jour avec la probabilité $\frac{1}{365}$.
3. À chaque paire, on associe la variable qui vaut 1 si les deux élèves sont nés le même jour, et 0 sinon. N est la somme de ces 435 variables, d'espérance $\frac{1}{365}$. Par linéarité, $E(N) = \frac{435}{365} \approx 1{,}19$.

Une solution de BarroTech