# Calcul intégral

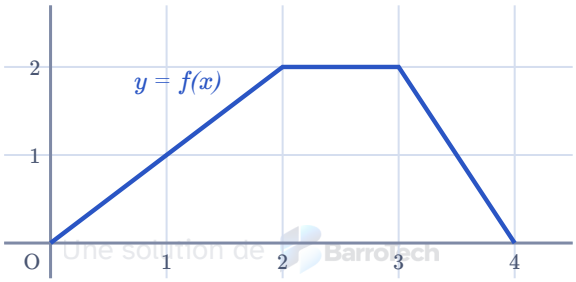
TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

*Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.*

## Leçon 1 : l'intégrale, une aire sous la courbe

### Exercice 1 : lire des intégrales sur des figures

1. Calculer ces intégrales à l'aide de figures simples, sans primitive.
   - **a.** $\displaystyle\int_0^4 3\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_2^5 (x-1)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$
2. La fonction $f$ est représentée ci-dessous sur $[0\,;4]$. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.




Courbe de f sur [0 ; 4]

3. Dans ce repère, une unité vaut $3$ cm en abscisse et $2$ cm en ordonnée. Combien vaut une unité d'aire, en cm$^2$ ? En déduire l'aire de la question 2 en cm$^2$.

### Exercice 2 : l'aire sous $y = x^3$ par des rectangles

Soit $f(x) = x^3$ sur $[0\,;1]$. Pour un entier $n \geq 1$, on découpe $[0\,;1]$ en $n$ morceaux de largeur $\dfrac{1}{n}$. On note $s_n$ la somme des aires des rectangles placés sous la courbe, et $S_n$ la somme des aires des rectangles placés au-dessus.

1. Calculer $s_4$ et $S_4$. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.
2. On admet que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrer que $S_n = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$ et $s_n = \dfrac{(n-1)^2}{4n^2}$.
3. Déterminer les limites de $(s_n)$ et de $(S_n)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

## Leçon 2 : la primitive qui s'annule en $a$

### Exercice 3 : une aire qui dépend de $x$

Soit $f(t) = t + 2$ sur $[0\,;4]$. Pour $x$ dans $[0\,;4]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Quelle est la nature du domaine dont $F(x)$ mesure l'aire ? Montrer que $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$.
2. Vérifier que $F' = f$ et que $F(0) = 0$. Quel théorème du cours retrouve-t-on ?
3. Pour $x$ dans $[1\,;4]$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Exprimer $G(x)$ à l'aide de $F(x)$, puis donner sa formule.
4. Pour quelle valeur de $x$ l'aire $F(x)$ vaut-elle $6$ u.a. ?

### Exercice 4 : la démonstration, sur un exemple puis pour $f$ décroissante

**Partie A.** Soit $f(t) = t^2$ sur $[0\,;2]$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $0$.

1. Donner $F(x)$.
2. Avec $x_0 = 1$ et $h = 0{,}1$, vérifier l'encadrement de la démonstration du cours : $h\,f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h\,f(x_0 + h)$.

**Partie B.** Soit $g$ une fonction continue, positive et **décroissante** sur $[a\,;b]$, et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $x_0$ dans $[a\,;b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \leq b$.

3. Quels rectangles encadrent maintenant la bande entre $x_0$ et $x_0 + h$ ? Écrire l'encadrement de $G(x_0 + h) - G(x_0)$.
4. En déduire que le taux d'accroissement de $G$ en $x_0$ a pour limite $g(x_0)$ quand $h$ tend vers $0$ par valeurs positives.

## Leçon 3 : calculer une intégrale avec une primitive

### Exercice 5 : primitives de référence

Calculer les intégrales suivantes. Donner la valeur exacte.

- **a.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x$
- **b.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
- **c.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \cos x \, \mathrm{d}x$
- **d.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$
- **e.** $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{x} \, \mathrm{d}x$
- **f.** $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^2} \frac{2}{x} \mathrm{d}x$
- **g.** $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$ (comparer au résultat de l'exercice 2)

### Exercice 6 : reconnaître la forme

Calculer les intégrales suivantes, en reconnaissant une forme $u' \, \mathrm{e}^{u}$, $u' u^{n}$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Une solution de BarroTech

- **a.** $\displaystyle\int_{0}^{1} 2x \left(x^2 + 1\right)^2 \mathrm{d}x$
- **b.** $\displaystyle\int_{0}^{1} x \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$
- **c.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(2x) \, \mathrm{d}x$
- **d.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$
- **e.** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2x + 1} \mathrm{d}x$
- **f.** $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \mathrm{d}x$
- **g.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x$

## Leçon 4 : signe quelconque, existence des primitives

### Exercice 7 : intégrale et aire totale

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[0\,;4]$.

1. Factoriser $f(x)$ et dresser le tableau de signes de $f$ sur $[0\,;4]$.
2. Déterminer une primitive $F$ de $f$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire totale du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses, sur $[0\,;4]$.

### Exercice 8 : une fonction définie par une intégrale

Pour tout réel $x$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Pourquoi $F$ est-elle bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ? Donner $F'(x)$ et $F(0)$.
2. Étudier le sens de variation de $F$. En déduire le signe de $F(x)$ selon le signe de $x$.
3. On pose $G(x) = F(x) + F(-x)$. Calculer $G'(x)$, puis montrer que $F$ est impaire.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe de $F$ en $0$.
5. Refaire la démonstration du théorème d'existence pour $f(x) = 2x$ sur $[-1\,;1]$ : donner le minimum $m$, la fonction $g = f - m$, la primitive $G_1$ de $g$ qui s'annule en $-1$, puis $F_1(x) = G_1(x) + mx$. Vérifier que $F_1' = f$.

Une solution de BarroTech

## Leçon 5 : relation de Chasles, linéarité, positivité

### Exercice 9 : découper et séparer

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$ et $f(x) = 2x - 1$ sur $[1\,;3]$. Vérifier que $f$ est continue en $1$, puis calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $g$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\displaystyle\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Calculer :
   - **a.** $\displaystyle\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_5^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_0^2 \big(3g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x$

### Exercice 10 : deux intégrales qui s'aident

On pose $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $A$ à l'aide d'une primitive. En déduire $B$, et donner sa valeur arrondie au centième.
3. Sans calculer, donner le signe de $C = \displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$, de $D = \displaystyle\int_2^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et de $E = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x - 1)\,\mathrm{d}x$.
4. Vrai ou faux : « si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ avec $a < b$, alors $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$ » ? Justifier.

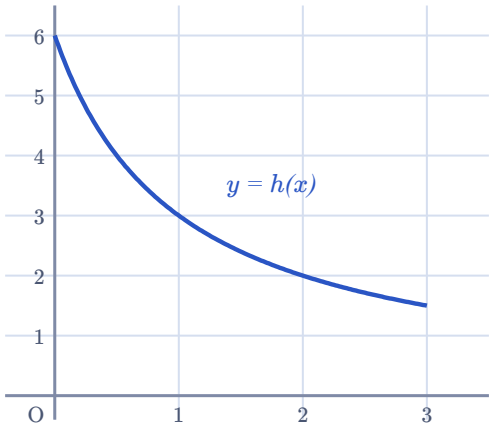
---

## Leçon 6 : intégrer des inégalités

### Exercice 11 : encadrer sans primitive

1. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,\mathrm{d}x$. Justifier que, pour tout $x$ de $[0\,;1]$, $1 \leq \sqrt{1 + x^4} \leq 1 + x^4$. En déduire un encadrement de $I$.
2. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer que, pour tout $x$ de $[0\,;1]$, $1 - x^2 \leq \dfrac{1}{1 + x^2} \leq 1$. En déduire un encadrement de $J$.
3. La figure représente $h(x) = \dfrac{6}{x + 1}$ sur $[0\,;3]$, sur un quadrillage d'un carreau par unité d'aire. En comptant les carreaux, donner un encadrement de $K = \displaystyle\int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers. Calculer ensuite $K$ et vérifier.

Une solution de Barrolech




Courbe de h sur [0 ; 3]

### Exercice 12 : encadrer $\ln(1+x)$

1. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$.
2. En intégrant de $0$ à $x$, avec $x \geq 0$, montrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire un encadrement de $\ln(1{,}1)$, et le comparer à la valeur donnée par la calculatrice.
4. En déduire la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs positives.

---

## Leçon 7 : aire entre deux courbes

### Exercice 13 : calculs d'aires

Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre les deux courbes, sur le segment indiqué.

1. $y = 2x$ et $y = x^2$ sur $[0\,;2]$.
2. $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ sur $[0\,;1]$. On vérifiera que $x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
3. $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Attention : les courbes se croisent.
4. $y = x$ et $y = x^2 - 2x$, entre leurs deux points d'intersection, à déterminer.

### Exercice 14 : mesurer les inégalités de revenus

En sciences économiques, la **courbe de Lorenz** d'un pays est la courbe d'une fonction $L$ définie sur $[0\,;1]$ : $L(x)$ est la part du revenu total touchée par la fraction $x$ des ménages les plus modestes. Le **coefficient de Gini** vaut $G = 2\displaystyle\int_0^1 \big(x - L(x)\big)\,\mathrm{d}x$. Plus $G$ est grand, plus les revenus sont inégaux.

On étudie deux pays imaginaires.

1. **Pays A** : $L(x) = x^2$. Que vaut $L(0{,}5)$ ? Interpréter. Calculer $G$.
2. **Pays B** : $L(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}$.
   - **a.** Vérifier que $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$. Justifier que la courbe de $L$ est sous la droite d'équation $y = x$ sur $[0\,;1]$, à l'aide de la convexité.
   - **b.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x$, puis le coefficient de Gini du pays B. Donner sa valeur arrondie au centième.
3. Lequel de ces deux pays a les revenus les plus inégaux ?

## Leçon 8 : valeur moyenne d'une fonction

### Exercice 15 : calculer et encadrer des valeurs moyennes

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $[0\,;3]$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$
3. $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;2]$
4. $k(x) = \cos x$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$
5. Sans calcul, encadrer la valeur moyenne de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $[0\,;1]$.
6. À l'aide de la question 3 de l'exercice 11, encadrer la valeur moyenne de $x \mapsto \dfrac{6}{x+1}$ sur $[0\,;3]$, puis la calculer.

### Exercice 16 : une averse sur un toit

Pendant une averse de deux heures, l'intensité de la pluie, en millimètres par heure, est modélisée par $I(t) = 9t(2-t)$, où $t$ est le temps en heures, pour $t$ dans $[0\,;2]$. On admet que la hauteur d'eau tombée, en millimètres, est l'intégrale de l'intensité.

1. À quel instant l'intensité est-elle maximale ? Que vaut-elle ?
2. Calculer la hauteur d'eau tombée pendant l'averse.
3. Calculer l'intensité moyenne. Interpréter cette valeur.
4. Un millimètre de pluie sur un mètre carré donne un litre d'eau. Quel volume recueille-t-on sur un toit de $100\ \mathrm{m}^2$ ?
5. L'eau du réseau coûte $4$ euros le mètre cube. Quelle économie représente cette eau de pluie ?

Une solution de BarroTech

## Leçon 9 : intégration par parties

### Exercice 17 : calculer par parties

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

- **a.** $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
- **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$
- **c.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$
- **d.** $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
- **e.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

### Exercice 18 : deux fois de suite

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.
2. On pose $A=\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ et $B=\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$. Avec $v'(x)=\mathrm{e}^x$, montrer que $A=\mathrm{e}^{\pi}+1+B$ et que $B=-A$. En déduire $A$ et $B$.
3. À l'aide de la primitive de $\ln$ vue dans le cours, calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

---

## Leçon 10 : suites d'intégrales

### Exercice 19 : une suite avec l'exponentielle

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=(n+1)\,u_n-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. En déduire $u_1$ et $u_2$.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ est positive et décroissante.
5. Montrer que $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de $(u_n)$.
6. Déterminer la limite de $(n+1)\,u_n$.

Une solution de BarroTech

### Exercice 20 : une suite avec le logarithme

Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $w_0$.
2. Avec $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ et $v'(x)=1$, montrer que $w_{n+1}=\mathrm{e}-(n+1)\,w_n$.
3. En déduire $w_1$ et $w_2$.
4. Montrer que la suite $(w_n)$ est positive et décroissante. On pourra utiliser $0\leq\ln x\leq 1$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$.
5. Déduire de la question 2 que $0\leq w_n\leq\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, puis déterminer la limite de $(w_n)$.

## Leçon 11 : rectangles, milieux, trapèzes en Python

### Exercice 21 : à la main

On veut approcher $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2$ avec $n = 4$ morceaux.

1. Donner $h$ et les points $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.
2. Calculer les valeurs approchées par les rectangles à gauche, les rectangles à droite, les milieux et les trapèzes. Donner les résultats arrondis à $10^{-4}$.
3. Quelle méthode donne l'écart le plus petit avec $\ln 2 \approx 0{,}6931$ ?

### Exercice 22 : une valeur approchée de $\pi$

Soit $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sur $[0\,;1]$.

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.
2. La fonction $g$ est décroissante sur $[0\,;1]$. Montrer que l'écart entre la somme à gauche et la somme à droite vaut $h\,\big(g(0) - g(1)\big)$, avec $h = \dfrac{1}{n}$.
3. Écrire une fonction Python `milieux(f, a, b, n)`, sur le modèle de `rectangles` vue dans le cours.
4. Avec $n = 1000$, on trouve $0{,}78489$ à droite, $0{,}78589$ à gauche et $0{,}78540$ pour les milieux. En déduire un encadrement de $\pi$, et une valeur approchée.

Une solution de BarroTech

## Leçon 12 : la méthode de Monte-Carlo

### Exercice 23 : lire une simulation

1. Une simulation place $1\,000$ points au hasard dans le carré $[0\,;1] \times [0\,;1]$. On en compte $335$ sous la courbe de $x \mapsto x^2$. Quelle valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ obtient-on ? Quel est l'écart avec la valeur exacte ?
2. On cherche $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ avec des points tirés dans le rectangle $[0\,;1] \times [0\,;3]$.
   - **a.** Pourquoi la hauteur $M = 2$ ne conviendrait-elle pas ?
   - **b.** Une simulation de $10\,000$ points en compte $5\,742$ sous la courbe. Quelle valeur approchée obtient-on ? La comparer à la valeur exacte.
3. Peut-on prévoir le résultat exact d'une simulation avant de la lancer ? Pourquoi ?

### Exercice 24 : Monte-Carlo en Python

1. Un point $M(x\,;y)$ est tiré au hasard dans le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$. Montrer que la probabilité que $x^2+y^2\leq 1$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$.
2. Écrire une fonction Python `approche_pi(N)` qui renvoie une valeur approchée de $\pi$, à partir de $N$ points.
3. Écrire une fonction `monte_carlo2(f, a, b, M, N)` qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque $0\leq f\leq M$ sur $[a\,;b]$. Quelle valeur attend-on pour $f : x\mapsto x^2$, $a=0$, $b=2$, $M=4$ ?

---

## Leçon 13 : l'algorithme de Brouncker pour $\ln 2$

### Exercice 25 : Brouncker et les rectangles

Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\times 2k}$. On note $T_n$ la somme des rectangles à droite, à $n$ morceaux, pour $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

1. Calculer $S_1$, $S_2$, $S_3$ et $S_4$ sous forme de fractions.
2. Montrer que $T_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. Calculer $T_1$, $T_2$ et $T_3$.
3. Montrer que $T_{n+1}-T_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.
4. En déduire, par récurrence, que $T_n=S_n$ pour tout entier $n\geq 1$.

### Exercice 26 : à quelle précision ?

On rappelle que $0\leq \ln 2-S_n\leq\dfrac{1}{2n+1}$.

1. Avec $n=4$, en déduire un encadrement de $\ln 2$. Donner les bornes arrondies à $10^{-4}$, la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès.
2. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $\dfrac{1}{2n+1}\leq 0{,}01$.
3. Voici un programme qui cherche le premier entier $n$ tel que $\ln 2-S_n\leq 0{,}001$. Le compléter.

```
from math import log

n = 0
s = 0
while ...:
    n = n + 1
    s = s + ...
print(n)
```

4. Le programme affiche $250$. La majoration du cours indiquait $n=500$. Comment expliquer cette différence ?