Calcul intégral

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les résultats de simulation dépendent du hasard : les tiens seront différents.

Exercice 1

1. - **a.** C'est un rectangle : $4 \times 3 = 12$.
   - **b.** C'est un trapèze de bases $f(2) = 1$ et $f(5) = 4$, de hauteur 3 : $\dfrac{1+4}{2} \times 3 = \dfrac{15}{2}$.
   - **c.** C'est un demi-disque de rayon 3 : $\dfrac{\pi \times 3^2}{2} = \dfrac{9\pi}{2}$.
2. Le domaine se découpe en un triangle ($\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$), un rectangle ($1 \times 2 = 2$) et un triangle ($\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$). Donc $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$.
3. 1 u.a. $= 3 \times 2 = 6$ **cm**^{2}. L'aire vaut $5 \times 6 = 30$ **cm**^{2}.

Exercice 2

1. $s_4 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{0+1+8+27}{64} = \dfrac{36}{256} = \dfrac{9}{64}$ et $S_4 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1+8+27+64}{64} = \dfrac{100}{256} = \dfrac{25}{64}$. Comme f est croissante, $\dfrac{9}{64} \leq \displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{25}{64}$.
2. Les hauteurs à droite sont les $\left(\dfrac{k}{n}\right)^3$, pour k de 1 à n. Donc
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$
De même, s_n s'arrête à $k = n-1$: $s_n = \dfrac{1}{n^4} \times \dfrac{(n-1)^2 n^2}{4} = \dfrac{(n-1)^2}{4n^2}$.
3. $S_n = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$ et $s_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ ont pour limite $\dfrac{1}{4}$. Comme $s_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \leq S_n$ pour tout n, on obtient $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 3

1. C'est un trapèze de bases $f(0) = 2$ et $f(x) = x + 2$, de hauteur x : $F(x) = \dfrac{2 + (x+2)}{2} \times x = \dfrac{x^2}{2} + 2x$.
2. $F'(x) = x + 2 = f(x)$ et $F(0) = 0$. On retrouve le théorème : F est la primitive de f qui s'annule en 0.
3. L'aire de 1 à x est l'aire de 0 à x, moins l'aire de 0 à 1 : $G(x) = F(x) - F(1)$. Avec $F(1) = \dfrac{5}{2}$: $G(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{5}{2}$.
4. $F(x) = 6 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff (x-2)(x+6) = 0$. Sur $[0\,;4]$, la seule solution est $x = 2$.

Exercice 4

1. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$: sa dérivée est $t \mapsto t^2$ en $t = x$, et $F(0) = 0$.
2. $h\,f(x_0) = 0{,}1\ ;\ h\,f(x_0+h) = 0{,}1 \times 1{,}21 = 0{,}121\ ;\ F(1{,}1) - F(1) = \dfrac{1{,}331 - 1}{3} \approx 0{,}1103$. On a bien $0{,}1 \leq 0{,}1103 \leq 0{,}121$.
3. *Comme g est décroissante, les rôles sont échangés.* Sur $[x_0\,;x_0+h]$, $g(x_0+h) \leq g(t) \leq g(x_0)$. La bande contient le rectangle de hauteur $g(x_0+h)$ et est contenue dans celui de hauteur $g(x_0)$:
$$h\,g(x_0+h) \leq G(x_0+h) - G(x_0) \leq h\,g(x_0).$$
Une solution de BarroTech
4. On divise par $h > 0$: $g(x_0+h) \leq \dfrac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} \leq g(x_0)$. Comme g est continue, $g(x_0+h)$ tend vers $g(x_0)$ quand h tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, le taux d'accroissement a pour limite $g(x_0)$.

Exercice 5

- **a.** $\Big[x^3 - x^2 + x\Big]_{-1}^{2} = (8 - 4 + 2) - (-1 - 1 - 1) = 6 + 3 = 9$
- **b.** $\Big[6\sqrt{x}\Big]_{1}^{9} = 18 - 6 = 12$
- **c.** $\Big[\sin x\Big]_{0}^{\pi/3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- **d.** $\left[-\dfrac{1}{x}\right]_{1}^{2} = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$
- **e.** $\Big[\mathrm{e}^x\Big]_{0}^{\ln 2} = 2 - 1 = 1$
- **f.** $\Big[2\ln x\Big]_{1}^{\mathrm{e}^2} = 2 \times 2 - 0 = 4$
- **g.** $\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \dfrac{1}{4}$: c'est le résultat de l'exercice 2.

Exercice 6

- **a.** Forme $u'u^2$ avec $u(x) = x^2+1$: $\left[\dfrac{(x^2+1)^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{8-1}{3} = \dfrac{7}{3}$
- **b.** Forme $-\dfrac{1}{2}u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -x^2$: $\left[-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$
- **c.** $\left[-\dfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1$
- **d.** Forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$: $\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$
- **e.** Forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$: $\left[\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 3$
- **f.** Forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, de primitive $\sqrt{u}$: $\left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4 = 3-1 = 2$
- **g.** Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x > 0$ sur $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2]$: $\left[\ln(\ln x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Exercice 7

1. $f(x) = (x-1)(x-3)$: $f(x) \geq 0$ sur $[0\,;1]$ et sur $[3\,;4]$, $f(x) \leq 0$ sur $[1\,;3]$.
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.
3. $F(0) = 0$, $F(1) = \dfrac{4}{3}$, $F(3) = 0$, $F(4) = \dfrac{4}{3}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}$, $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.
4. Par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$. L'aire totale compte chaque partie positivement : $\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3} = 4$ **u.a.**

Exercice 8

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives, et F est sa primitive qui s'annule en 0. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $F(0) = 0$.
2. $F'(x) > 0$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ **pour** $x > 0$ et $F(x) < 0$ **pour** $x < 0$.
3. $G'(x) = F'(x) - F'(-x) = \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-(-x)^2} = 0$. Donc G est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $G(0) = 2F(0) = 0$. Ainsi $F(-x) = -F(x)$ pour tout réel x : F **est impaire**.
4. $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$: la tangente a pour équation $y = x$.
5. $m = -2$ (en -1), $g(x) = 2x+2$, $G_1(x) = (x+1)^2$: sa dérivée est g et $G_1(-1) = 0$. Alors $F_1(x) = (x+1)^2 - 2x = x^2+1$, et $F_1'(x) = 2x = f(x)$.

Une solution de ParroTech

Exercice 9

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$
2. Les deux expressions valent 1 en 1 : f est continue en 1. Par la relation de Chasles :
$$\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} (2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \Big[x^2 - x\Big]_1^3 = \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}.$$
3. - **a.** $\displaystyle\int_{2}^{5} g = \int_{0}^{5} g - \int_{0}^{2} g = 3 - 5 = -2.$
   - **b.** On échange les bornes : 2.
   - **c.** Par linéarité : $3 \times 5 + 2 = 17$.

Exercice 10

1. $A + B = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 1.$
2. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: $A = \Big[\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)\Big]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 2 = \ln\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$. Donc $B = 1 - \ln\dfrac{\mathrm{e}+1}{2} \approx 0{,}38$.
3. $C \geq 0$: $\ln x \geq 0$ sur $[1\,;2]$ et les bornes sont dans l'ordre. $D \leq 0$: $x^2 \geq 0$, mais les bornes sont inversées. $E \leq 0$: $\cos x - 1 \leq 0$ et les bornes sont dans l'ordre.
4. **Faux.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \geq 0$, alors que $x < 0$ sur $[-1\,;0[$.

Une solution de BarroTech

Exercice 11

1. Pour x dans $[0\,;1]$, $y = 1 + x^4 \geq 1$. Donc $\sqrt{y} \geq 1$. De plus, $\sqrt{y} \leq y$, car $y \geq 1$. On intègre : $1 \leq I \leq 1 + \dfrac{1}{5}$, soit $1 \leq I \leq \dfrac{6}{5}$.
2. $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ car $1 + x^2 \geq 1$. De plus, $\left(1 - x^2\right)\left(1 + x^2\right) = 1 - x^4 \leq 1$, et on divise par $1 + x^2 > 0$. On intègre, avec $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \leq J \leq 1.$
3. Colonne par colonne, h reste entre 3 et 6, puis entre 2 et 3, puis entre $1{,}5$ et 2. On compte $3 + 2 + 1 = 6$ carreaux sous la courbe, et $6 + 3 + 2 = 11$ avec ceux qu'elle traverse. Donc $6 \leq K \leq 11$. Par le calcul, $K = \Big[6\ln(x+1)\Big]_0^3 = 6\ln 4 \approx 8{,}32$.

Exercice 12

1. Pour $t \geq 0$, $1+t \geq 1$, donc $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$. Et $(1-t)(1+t) = 1-t^2 \leq 1$: on divise par $1+t > 0$.
2. On intègre de 0 à x, avec $x \geq 0$: $\displaystyle\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$, $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.
3. Avec $x = 0{,}1$: $0{,}095 \leq \ln(1{,}1) \leq 0{,}1$. La calculatrice donne $\ln(1{,}1) \approx 0{,}0953$.
4. Pour $x > 0$, on divise par x : $1 - \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$. D'après le théorème des gendarmes, la limite est 1.

Exercice 13

1. $2x - x^2 = x(2-x) \geq 0$ sur $[0\,;2]$. Aire $= \left[x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{3}$ **u.a.**
2. Sur $[0\,;1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{2}{3}\,x\sqrt{x}$ est $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}$. Aire $= \left[\dfrac{2}{3}\,x\sqrt{x} - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ **u.a.**
3. $\cos x \geq \sin x$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, et $\sin x \geq \cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On découpe en $\dfrac{\pi}{4}$:

   $$\text{Aire} = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(-1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2 \text{ u.a.}$$

4. $x^2 - 2x = x \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$. Sur $[0\,;3]$, $x - \left(x^2 - 2x\right) = x(3-x) \geq 0$.
   Aire $= \left[\dfrac{3}{2}\,x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = \dfrac{27}{2} - 9 = \dfrac{9}{2}$ **u.a.**

Exercice 14

1. $L(0{,}5) = 0{,}25$: les $50\,\%$ des ménages les plus modestes touchent $25\,\%$ du revenu total. $G = 2\displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2\right)\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
2. - **a.** $L(0) = 0$ et $L(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$. La fonction L est convexe, car $L''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-1} > 0$. Sa courbe est donc sous sa sécante, qui passe par $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$: c'est la droite d'équation $y = x$.
   - **b.** $\displaystyle\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$. Donc $G = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right) = \dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}16$.
3. $\dfrac{1}{3} > 0{,}16$: les revenus sont plus inégaux dans le **pays A**.

Exercice 15

1. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^3 = 9$, donc $\mu = 3$.
2. $\displaystyle\mu = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}58$.
3. $\displaystyle\mu = \frac{1}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^2 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2} \approx 0{,}43$.
4. $\displaystyle\mu = \frac{2}{\pi}\Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$.
5. Sur $[0\,;1]$, $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$, donc $1 \leq \mu \leq \sqrt{2}$.
6. Avec $6 \leq K \leq 11$ et une largeur de 3 : $2 \leq \mu \leq \dfrac{11}{3}$. Le calcul donne $\mu = \dfrac{6\ln 4}{3} = 2\ln 4 \approx 2{,}77$.

Exercice 16

1. $I(t) = 18t - 9t^2$ et $I'(t) = 18 - 18t$: I est maximale en $t = 1$, et $I(1) = 9$ **mm/h**.
2. $\displaystyle\int_0^2 I(t)\,\mathrm{d}t = \Big[9t^2 - 3t^3\Big]_0^2 = 36 - 24 = 12$ **mm**.
3. $\mu = \dfrac{12}{2} = 6$ **mm/h**. Une pluie d'intensité constante de 6 mm/h donnerait la même hauteur d'eau en deux heures.
4. $12 \times 100 = 1\,200$ **litres**.
5. $1\,200$ litres font $1{,}2$ m^3 : l'économie vaut $1{,}2 \times 4 = 4{,}80$ **euros**.

Exercice 17

À chaque fois, on écrit u, u', v', v.

- **a.** $u(x) = x+1$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$: $\displaystyle\Big[(x+1)\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e} - 1 - (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}$
- **b.** $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$: $\displaystyle\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$
- **c.** $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$: $\displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$
- **d.** $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$: $\displaystyle\Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$
- **e.** $u(x) = \ln x$, $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $v(x) = -\dfrac{1}{x}$: $\displaystyle\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$

Exercice 18

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 0 - 2 = -2$. Ensuite, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -\cos x$:

$$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \pi^2 - 4.$$

2. Dans A, avec $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

$$A = \Big[\mathrm{e}^x\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = 0 - B, \quad \text{donc } B = -A.$$

Dans B, avec $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

$$B = \Big[\mathrm{e}^x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\pi} - 1 + A, \quad \text{donc } A = \mathrm{e}^{\pi} + 1 + B.$$

Avec $B = -A$: $2A = \mathrm{e}^{\pi} + 1$, d'où $A = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$ et $B = -\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.

3. $\Big[x\ln x - x\Big]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2\ln 2 - 1$.

Exercice 19

1. $u_0 = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
2. Avec $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)\,x^n$, $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$u_{n+1} = \Big[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\,u_n.$$

3. $u_1 = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ et $u_2 = 2\,u_1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.
4. Sur $[0\,;1]$, $x^n\,\mathrm{e}^{-x} \geq 0$: $u_n \geq 0$. Et $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} \leq x^n\,\mathrm{e}^{-x}$: $u_{n+1} \leq u_n$.
5. Sur $[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leq x^n$. On intègre : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
6. La relation donne $(n+1)\,u_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Une solution de Barrotech

Exercice 20

1. $w_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$.
2. $u(x) = (\ln x)^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)\,\dfrac{(\ln x)^n}{x}$, $v'(x) = 1$, $v(x) = x$:
$$w_{n+1} = \Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)\,w_n.$$
3. $w_1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$ et $w_2 = \mathrm{e} - 2$.
4. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $0 \leq \ln x \leq 1$: $(\ln x)^n \geq 0$, donc $w_n \geq 0$. Et $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$, donc $w_{n+1} \leq w_n$.
5. La relation et $w_{n+1} \geq 0$ donnent $(n+1)\,w_n = \mathrm{e} - w_{n+1} \leq \mathrm{e}$. Donc $0 \leq w_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Exercice 21

1. $h = \dfrac{1}{4}$; $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{5}{4}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = \dfrac{7}{4}$, $x_4 = 2$.
2.

Méthode	Calcul	Résultat
À gauche	$\dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{7}\right)$	$0{,}7595$
À droite	$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{2}\right)$	$0{,}6345$
Milieux	$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{11} + \dfrac{8}{13} + \dfrac{8}{15}\right)$	$0{,}6912$
Trapèzes	moyenne des deux premières	$0{,}6970$

Une solution de BarroTech

3. Les écarts valent environ $0{,}066$, $0{,}059$, $0{,}002$ et $0{,}004$. **La méthode des milieux** est la plus précise, suivie de près par celle des trapèzes.

Exercice 22

1. La courbe de g est un quart de cercle de rayon 1 : le domaine est un quart de disque, d'aire $\dfrac{\pi}{4}$.
2. La somme à gauche et la somme à droite ont les mêmes termes $h\,g(x_1), \ldots, h\,g(x_{n-1})$. Il reste $h\,g(x_0) - h\,g(x_n) = h\,\big(g(0) - g(1)\big)$.
3.
```
def milieux(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k * h + h / 2)
    return h * s
```
4. On multiplie par 4 : $3{,}1395 \leq \pi \leq 3{,}1436$. Les milieux donnent $\pi \approx 3{,}1416$.

Exercice 23

1. Valeur approchée : $0{,}335$. La valeur exacte est $\dfrac{1}{3}$: l'écart vaut environ $0{,}002$.
2. - **a.** La courbe dépasse 2 : par exemple, $\mathrm{e}^1 \approx 2{,}72$. Il faut $f \leq M$ sur tout le segment.
   - **b.** $0{,}5742 \times 1 \times 3 = 1{,}7226$. La valeur exacte est $\mathrm{e} - 1 \approx 1{,}7183$: l'écart vaut environ $0{,}004$.
3. **Non** : les points sont tirés au hasard, et le résultat change à chaque exécution. On sait seulement qu'il est proche de la valeur exacte, surtout si N est grand.

Exercice 24

1. La condition $x^2 + y^2 \leq 1$ décrit un quart de disque de rayon 1, d'aire $\dfrac{\pi}{4}$, dans un carré d'aire 1. La probabilité vaut donc $\dfrac{\pi}{4}$.
2. On multiplie la fréquence par 4.

```
from random import random

def approche_pi(N):
    dedans = 0
    for i in range(N):
        x = random()
        y = random()
        if x ** 2 + y ** 2 <= 1:
            dedans = dedans + 1
    return 4 * dedans / N
```

Une solution de BarroTech

Une exécution a donné $3{,}168$ pour $N = 1\,000$, $3{,}1456$ pour $N = 10\,000$ et $3{,}13428$ pour $N = 100\,000$.

3. On tire x dans $[a\,;b]$ et y dans $[0\,;M]$, et on multiplie la fréquence par l'aire du rectangle.

```
def monte_carlo2(f, a, b, M, N):
    sous = 0
    for i in range(N):
        x = a + (b - a) * random()
        y = M * random()
        if y <= f(x):
            sous = sous + 1
    return sous / N * (b - a) * M
```

On attend une valeur proche de $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.

Exercice 25

1. $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$, $S_3 = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} = \frac{37}{60}$, $S_4 = \frac{37}{60} + \frac{1}{56} = \frac{533}{840}$.
2. Ici $h = \frac{1}{n}$ et $x_k = 1 + \frac{k}{n} = \frac{n+k}{n}$, donc $h \times \frac{1}{x_k} = \frac{1}{n+k}$. On additionne pour k de 1 à n. Ainsi $T_1 = \frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, $T_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$: ce sont bien S_1, S_2, S_3.
3. Dans T_{n+1}, le terme $\frac{1}{n+1}$ disparaît, et les termes $\frac{1}{2n+1}$ et $\frac{1}{2n+2}$ apparaissent. Or $\frac{1}{n+1} = \frac{2}{2n+2}$, donc
$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$
4. **Initialisation** : $T_1 = S_1 = \frac{1}{2}$. **Hérédité** : si $T_n = S_n$, alors $T_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Ce dernier terme est le terme de rang $k = n+1$ de S_{n+1}, car $2(n+1) - 1 = 2n+1$. Donc $T_{n+1} = S_{n+1}$. **Conclusion** : $T_n = S_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 26

1. $S_4 = \frac{533}{840} \approx 0{,}63452$ et $\frac{1}{9} \approx 0{,}11111$. Donc $0{,}6345 \leq \ln 2 \leq 0{,}7457$.
2. $\frac{1}{2n+1} \leq 0{,}01 \iff 2n+1 \geq 100 \iff n \geq 49{,}5$. Le plus petit entier est $n = 50$.
3.
```
from math import log

n = 0
s = 0
while log(2) - s > 0.001:
    n = n + 1
    s = s + 1 / ((2 * n - 1) * (2 * n))
print(n)
```
4. $\frac{1}{2n+1}$ est seulement une **majoration** de l'écart : elle garantit le résultat, sans être atteinte. Pour $n = 250$, l'écart vaut déjà moins de $0{,}001$, alors que la majoration vaut $\frac{1}{501} \approx 0{,}002$.

Une solution de BarroTech