Primitives et équations différentielles

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : équations différentielles et primitives

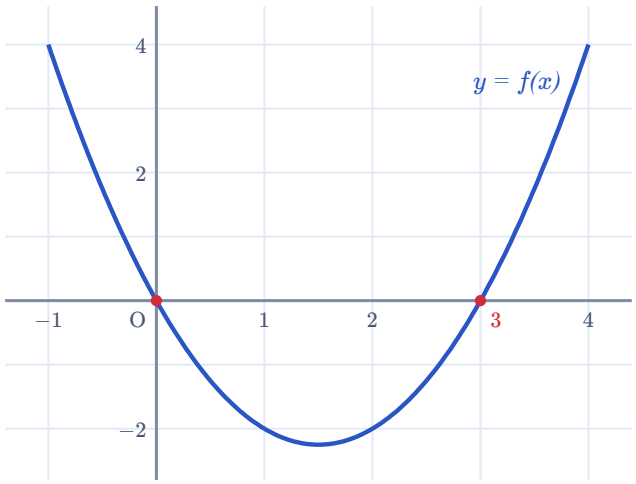
Exercice 1 : vérifier, sans résoudre

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$ est-elle solution de $y' = 2x$ sur $\mathbb{R}$? Est-elle solution de $y' = 2y$?
3. Montrer que $k : x \mapsto 4 - \mathrm{e}^{-x}$ est solution de $y' = -y + 4$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dans chaque cas, vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I.
   - **a.** $F(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{2x}$, $f(x) = 4x\,\mathrm{e}^{2x}$, $I = \mathbb{R}$
   - **b.** $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$, $I = \mathbb{R}$
   - **c.** $F(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$, $f(x) = 2x\ln x$, $I =]0\,;+\infty[$

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : du signe de f aux variations de F

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f continue sur $[-1\,;4]$. Elle coupe l'axe des abscisses en 0 et en 3. On note F une primitive de f sur $[-1\,;4]$.



Courbe de f sur [−1 ; 4]

1. Dresser le tableau de signes de f sur $[-1\,;4]$.
2. En déduire le tableau de variations de F sur $[-1\,;4]$. Préciser où F admet un maximum local et un minimum local.
3. Sans calcul, comparer $F(1)$ et $F(2)$.
4. On admet que $f(x) = x^2 - 3x$. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f ?

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 1, \qquad H(x) = 2x - 3, \qquad K(x) = x^3 - 3x^2.$$

Leçon 2 : deux primitives diffèrent d'une constante

Exercice 3 : trouver la bonne primitive

1. Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto 6x^2 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 0$.
2. Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$ telle que $G(-1) = 4$.
3. Sur $]0\,;+\infty[$, on pose $F(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ et $G(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x}$. Calculer $G(x) - F(x)$. Sans dériver G, en déduire que F et G sont des primitives d'une même fonction, puis préciser cette fonction.
4. Sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sin^2 x$ et $G(x) = -\cos^2 x$. Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$. Que vaut $G(x) - F(x)$? Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 4 : une fusée à eau

Un club de sciences lance une fusée à eau à la verticale. On note t le temps en secondes, $v(t)$ sa vitesse en mètres par seconde et $h(t)$ son altitude en mètres. On néglige les frottements : après le lancer, $v'(t) = -10$. À l'instant $t = 0$, la fusée est au sol avec une vitesse de 20 mètres par seconde.

1. Déterminer $v(t)$.
2. Sachant que $h' = v$, déterminer $h(t)$.
3. À quel instant la fusée atteint-elle son altitude maximale ? Quelle est cette altitude ?
4. À quel instant la fusée retombe-t-elle au sol ? Quelle est alors sa vitesse ?

Leçon 3 : primitives des fonctions de référence

Exercice 5 : le tableau en pratique

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- **a.** $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$
- **b.** $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
- **c.** $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} - x^3$ sur $]0\,;+\infty[$
- **d.** $k(x) = 2\,\mathrm{e}^x - 3\sin x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$
- **e.** $m(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
- **f.** $n(x) = \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty\,;0[$
- **g.** $p(x) = \dfrac{3}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
- **h.** $q(x) = (2x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra développer)

Exercice 6 : avec une condition, et un piège

1. Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$. Calculer $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 2x - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ telle que $G(1) = 0$.
3. Déterminer la primitive H de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ telle que $H(\mathrm{e}) = 5$.
4. Une élève affirme qu'une primitive de $x \mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\sin x$. Montrer qu'elle se trompe, puis vérifier que $x \mapsto x\sin x + \cos x$ convient.

Leçon 4 : primitives de fonctions composées

Exercice 7 : reconnaître la forme

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- **a.** $a(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$
- **b.** $b(x) = (2x-1)\left(x^2-x+5\right)^4$ sur $\mathbb{R}$
- **c.** $c(x) = \dfrac{6x}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$
- **d.** $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$
- **e.** $r(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
- **f.** $f(x) = \cos(2x) + \sin(4x)$ sur $\mathbb{R}$
- **g.** $g(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$
- **h.** $h(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
- **i.** $s(x) = \cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$ sur $\mathbb{R}$
- **j.** $j(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ sur $\left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$
- **k.** $k(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty\,;1[$
- **l.** $l(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$

Une solution de BarroTech

Exercice 8 : transformer et comparer

1. Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
2. Vérifier que, pour tout $x > -1$, $\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = 1 + \dfrac{2}{(x+1)^2}$. En déduire une primitive de cette fonction sur $]-1\,;+\infty[$.
3. On considère $h : x \mapsto \sin x \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Trouver une primitive de h en posant $u(x) = \sin x$.
   - **b.** Trouver une primitive de h en posant $u(x) = \cos x$.
   - **c.** Sachant que $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, trouver une troisième primitive de h.
   - **d.** Ces trois résultats sont-ils contradictoires ? On donne $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Leçon 5 : l'équation $y' = ay$

Exercice 9 : résoudre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
   - **a.** $y' = 5y$
   - **b.** $y' = -3y$ avec $y(0) = 2$
   - **c.** $2y' = y$
   - **d.** $y' + 4y = 0$ avec $y(1) = 3$
2. Une fonction f est solution d'une équation $y' = ay$. On sait que $f(0) = 2$ et $f(1) = 6$. Déterminer a, puis $f(x)$.
3. Soit $g : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{3x}$ et $h : x \mapsto -5\,\mathrm{e}^{3x}$.
   - **a.** Vérifier que $g + h$ et $4g$ sont solutions de $y' = 3y$.
   - **b.** La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{1}{3}$ est solution de $y' = 3y + 1$. Montrer que le double de cette fonction n'en est pas solution.

Exercice 10 : des nénuphars sur un lac

Un lac de 100 mètres carrés est colonisé par des nénuphars. La surface qu'ils couvrent, en mètres carrés, t semaines après le début de l'observation, est notée $S(t)$. On modélise son évolution par $S' = 0{,}2\,S$, avec $S(0) = 2$.

Une solution de BarroTech

1. Pourquoi cette équation traduit-elle une croissance proportionnelle à la surface déjà couverte ?
2. Déterminer $S(t)$.
3. Au bout de combien de temps la surface couverte double-t-elle ? Ce temps dépend-il de la surface de départ ?
4. Au cours de quelle semaine le lac est-il entièrement couvert selon ce modèle ?
5. Quelle partie du lac est couverte $3{,}47$ semaines avant cet instant ?

Leçon 6 : l'équation $y' = ay + b$

Exercice 11 : résoudre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
   - **a.** $y' = 3y + 6$
   - **b.** $y' = -2y + 5$ avec $y(0) = 0$
   - **c.** $2y' + y = 4$
   - **d.** $y' - 0{,}5y = 1$ avec $y(0) = 3$
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution trouvée en **b**, puis de celle trouvée en **d**.

Exercice 12 : charger une batterie

On branche un téléphone dont la batterie est à $10\,\%$. Le niveau de charge $B(t)$, en pourcentage, t minutes après le branchement, vérifie

$$B' = 0{,}02\,(100 - B), \qquad B(0) = 10.$$

1. Que signifie cette équation lorsque la batterie est presque pleine ?
2. Écrire l'équation sous la forme $y' = ay + b$, puis déterminer $B(t)$.
3. Étudier le sens de variation de B et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
4. Quel est le niveau de charge au bout d'une heure ? Arrondir au dixième.
5. Au bout de combien de temps la batterie atteint-elle $80\,\%$? Arrondir à la minute.

Leçon 7 : l'équation $y' = ay + f$

Exercice 13 : à partir d'une solution particulière

Dans chaque cas, vérifier que p est solution de l'équation, déterminer toutes les solutions, puis la solution vérifiant la condition donnée (s'il y en a une).

1. $y' = -y + 2x + 3,\ p(x) = 2x + 1,\ y(0) = 4$
2. $y' = y - \mathrm{e}^{2x},\ p(x) = -\mathrm{e}^{2x},\ y(0) = 0$
3. $y' + y = \cos x + \sin x,\ p(x) = \sin x,\ y(0) = 2$
4. $y' = 2y + 3\,\mathrm{e}^{2x},\ p(x) = 3x\,\mathrm{e}^{2x}$

Une solution de BarroTech

Exercice 14 : de l'équation à l'étude de fonction

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 6x + 1$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $p : x \mapsto \alpha x + \beta$ soit solution de (E).
2. Résoudre (E), puis déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Étudier les variations de f et préciser la valeur exacte de son minimum.
5. Montrer que la courbe de f reste strictement au-dessus de la droite d'équation $y = 3x - 1$.

Leçon 8 : la méthode d'Euler en Python

Exercice 15 : à la main, puis en Python

On considère l'équation $y' = 2x$ avec $y(0) = 1$, dont on veut une valeur approchée de $y(2)$.

1. Déterminer la solution exacte et calculer $y(2)$.
2. Avec $h = 0{,}5$, appliquer la méthode d'Euler à la main : calculer y_1, y_2, y_3 et y_4.
3. Recommencer avec $h = 0{,}25$ et huit pas. Comparer les deux écarts avec la valeur exacte.
4. On reprend la fonction de la vidéo :

```
def euler(f, x0, y0, h, n):
    X = [x0]
    Y = [y0]
    for k in range(n):
        Y.append(Y[k] + h * f(X[k]))
        X.append(X[k] + h)
    return X, Y
```

Écrire les lignes qui affichent la valeur approchée de $y(2)$ avec $h = 0{,}01$. Que trouve-t-on ?

Exercice 16 : Euler et les suites

On considère l'équation $y' = -y + 2$ avec $y(0) = 0$.

Une solution de BarroTech

1. Résoudre cette équation. Calculer la valeur exacte de $y(2)$, puis une valeur approchée au millième.
2. Montrer que la méthode d'Euler de pas h donne $y_{k+1} = (1 - h)\, y_k + 2h$.
3. Avec $h = 0{,}5$, calculer y_1, y_2, y_3 et y_4.
4. On pose $v_k = y_k - 2$. Montrer que (v_k) est une suite géométrique, puis exprimer y_k en fonction de k et de h.
5. Pour $0 < h < 1$, quelle est la limite de (y_k) ? Comparer avec la limite de la solution exacte.
6. Quelle commande permet d'obtenir une valeur approchée de $y(2)$ avec un pas de $0{,}01$, à l'aide de la fonction `euler2` de la vidéo ? On trouve environ $1{,}732$: quel est l'écart avec la valeur exacte ?