Primitives et équations différentielles

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Une primitive étant définie à une constante près, toute réponse qui diffère de celle du corrigé par une constante est juste.

Exercice 1

1. $g'(x) = 3 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = -6\,\mathrm{e}^{-2x}$ et $-2\,g(x) = -6\,\mathrm{e}^{-2x}$. Donc $g' = -2g$: g est solution.
2. $h'(x) = 2x$: h est solution de $y' = 2x$. En revanche $h'(1) = 2$ alors que $2\,h(1) = 4$: h n'est pas solution de $y' = 2y$.
3. $k'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $-k(x) + 4 = -4 + \mathrm{e}^{-x} + 4 = \mathrm{e}^{-x}$. Donc k est solution.
4. *Pour vérifier une primitive, on dérive.*
   - **a.** $F'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + (2x - 1) \times 2\,\mathrm{e}^{2x} = (2 + 4x - 2)\,\mathrm{e}^{2x} = 4x\,\mathrm{e}^{2x}$.
   - **b.** $F'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$.
   - **c.** $F'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} - x = 2x \ln x$.

Exercice 2

1. D'après la courbe, $f(x) > 0$ sur $[-1\,;0[$ et sur $]3\,;4]$, $f(x) < 0$ sur $]0\,;3[$, et f s'annule en 0 et en 3.
2. *Comme $F' = f$, le signe de f donne les variations de F.* F est strictement croissante sur $[-1\,;0]$, strictement décroissante sur $[0\,;3]$, strictement croissante sur $[3\,;4]$. Elle admet un **maximum local en** 0 et un **minimum local en** 3.
3. F est strictement décroissante sur $[0\,;3]$ et $1 < 2$, donc $F(1) > F(2)$.
4. $G'(x) = x^2 - 3x = f(x)$: G **convient**. H est la dérivée de f, pas une primitive. $K'(x) = 3x^2 - 6x$, ce n'est pas $f(x)$.

Exercice 3

1. Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto 2x^3 - x^2 + 5x + c$. $F(1) = 6 + c = 0$ donne $c = -6$: $F(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 6$.
2. $G(x) = x^2 - 3x + c$ et $G(-1) = 1 + 3 + c = 4 + c = 4$, donc $c = 0$: $G(x) = x^2 - 3x$.
3. $G(x) - F(x) = \dfrac{3x}{x} = 3$. La différence est constante : F et G ont la même dérivée sur $]0\,;+\infty[$. Comme $F(x) = x + \dfrac{1}{x}$, cette dérivée est $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
4. $F'(x) = 2 \sin x \cos x$ et $G'(x) = -2 \cos x \times (-\sin x) = 2 \sin x \cos x$. De plus $G(x) - F(x) = -\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = -1$. C'était prévisible : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Exercice 4

1. v est une primitive de $t \mapsto -10$: $v(t) = -10t + c$, et $v(0) = c = 20$. Donc $v(t) = 20 - 10t$.
2. h est une primitive de v : $h(t) = 20t - 5t^2 + c$, et $h(0) = c = 0$. Donc $h(t) = 20t - 5t^2$.
3. $h'(t) = v(t) = 20 - 10t$, positive pour $t < 2$ et négative pour $t > 2$. L'altitude est maximale à $t = 2$ **secondes**, et vaut $h(2) = 40 - 20 = 20$ **mètres**.
4. $h(t) = 5t(4 - t) = 0$ pour $t = 0$ ou $t = 4$. La fusée retombe au bout de 4 **secondes**, avec la vitesse $v(4) = -20$: elle descend à 20 **mètres par seconde**.

Exercice 5

- **a.** $F(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 7x$
- **b.** $G(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$
- **c.** $H(x) = 8\sqrt{x} - \dfrac{x^4}{4}$, car $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = 4 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
- **d.** $K(x) = 2\,\mathrm{e}^x + 3\cos x + \sin x$. *Attention au signe : la primitive de $-3\sin x$ est $+3\cos x$.*
- **e.** $m(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$, donc $M(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + \ln x$
- **f.** $n(x) = x^{-3}$, donc $N(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2}$
- **g.** $P(x) = 3\ln(-x)$, car on est sur $]-\infty\,;0[$
- **h.** $q(x) = 4x^2 + 4x + 1$, donc $Q(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x$

Une solution de BarroTech

Exercice 6

1. $F(x) = 3\sin x + 2\cos x + c$ et $F(0) = 2 + c = 1$, donc $c = -1$: $F(x) = 3\sin x + 2\cos x - 1$. Puis $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 + 0 - 1 = 2$.
2. $G(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} + c$ et $G(1) = 2 + c = 0$, donc $c = -2$: $G(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} - 2$.
3. $H(x) = \ln x + c$ et $H(\mathrm{e}) = 1 + c = 5$, donc $c = 4$: $H(x) = \ln x + 4$.
4. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\sin x$ est $x \mapsto x\sin x + \dfrac{x^2}{2}\cos x$. En $\dfrac{\pi}{2}$, elle vaut $\dfrac{\pi}{2}$, alors que $x\cos x$ vaut 0 : ce n'est pas $x\cos x$. *Il n'y a pas de règle pour la primitive d'un produit.* En revanche, la dérivée de $x \mapsto x\sin x + \cos x$ est $x \mapsto \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.

Exercice 7

On repère u, on calcule u', on ajuste un facteur constant, on écrit la primitive.

- **a.** $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$: $A(x) = \mathrm{e}^{x^3}$
- **b.** $u(x) = x^2 - x + 5$, $u'(x) = 2x - 1$: $B(x) = \dfrac{1}{5}\left(x^2 - x + 5\right)^5$
- **c.** $u(x) = x^2 + 2 > 0$, $c = 3\,\dfrac{u'}{u}$: $C(x) = 3\ln\left(x^2 + 2\right)$
- **d.** $u(x) = x^2 + 9 > 0$, $d = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$: $D(x) = \sqrt{x^2 + 9}$
- **e.** $u(x) = -3x + 1$: $R(x) = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x+1}$
- **f.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \dfrac{1}{4}\cos(4x)$
- **g.** $u(x) = x^2 + x + 1$ ne s'annule pas (discriminant -3), et $g = \dfrac{u'}{u^2}$: $G(x) = -\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$
- **h.** $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $h = u'\,u^3$: $H(x) = \dfrac{1}{4}(\ln x)^4$
- **i.** $u(x) = \sin x$: $S(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$
- **j.** $u(x) = 3x + 2 > 0$ sur l'intervalle, $j = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{u'}{u}$: $J(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x + 2)$
- **k.** $u(x) = 1 - x > 0$, $u'(x) = -1$, $k = -\dfrac{u'}{u}$: $K(x) = -\ln(1 - x)$
- **l.** $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $l = -u'\,\mathrm{e}^{u}$: $L(x) = -\mathrm{e}^{1/x}$

Une solution de BarroTech

Exercice 8

1. $u(x) = \mathrm{e}^x + 3 > 0$ et $f = \dfrac{u'}{u}$: $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 3\right) + c$. $F(0) = \ln 4 + c = 0$ donne $c = -\ln 4$: $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 3\right) - \ln 4$.
2. $1 + \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 1 + 2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$. Une primitive de $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$ est $-\dfrac{1}{x+1}$. Une primitive cherchée est $x \mapsto x - \dfrac{2}{x+1}$.
3. - **a.** $h = u'\,u$ avec $u = \sin$: une primitive est $F_1(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.
   - **b.** $h = -u'\,u$ avec $u = \cos$: une primitive est $F_2(x) = -\dfrac{1}{2}\cos^2 x$.
   - **c.** $h(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$: une primitive est $F_3(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(2x)$.
   - **d.** Ils ne sont pas contradictoires : les trois fonctions diffèrent d'une constante. $F_1(x) - F_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \dfrac{1}{2}$, et $F_1(x) - F_3(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\sin^2 x\right) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 9

1.
   - **a.** $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{5x}$, C réel.
   - **b.** $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-3x}$, et $y(0) = C = 2$: $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{-3x}$.
   - **c.** $y' = \dfrac{1}{2}\,y$: $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{x/2}$, C réel.
   - **d.** $y' = -4y$: $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-4x}$, et $C\,\mathrm{e}^{-4} = 3$ donne $C = 3\,\mathrm{e}^{4}$: $x \mapsto 3\,\mathrm{e}^{4-4x}$.
2. $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$, $f(0) = C = 2$, et $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{a} = 6$ donne $\mathrm{e}^{a} = 3$, donc $a = \ln 3$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{x\ln 3}$.
3.
   - **a.** $(g+h)(x) = -3\,\mathrm{e}^{3x}$ et $4g(x) = 8\,\mathrm{e}^{3x}$ sont de la forme $C\,\mathrm{e}^{3x}$: ce sont des solutions de $y' = 3y$.
   - **b.** La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{2}{3}$ a une dérivée nulle, alors que $3 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 1 = -1 \neq 0$: elle n'est pas solution de $y' = 3y + 1$.

Exercice 10

1. S' est la vitesse d'augmentation de la surface. L'équation dit qu'elle est proportionnelle à S : plus la surface couverte est grande, plus elle augmente vite.
2. $S(t) = C\,\mathrm{e}^{0{,}2t}$ et $S(0) = C = 2$: $S(t) = 2\,\mathrm{e}^{0{,}2t}$.
3. Pour $S(0) = S_0$, $S_0\,\mathrm{e}^{0{,}2t} = 2S_0 \iff \mathrm{e}^{0{,}2t} = 2 \iff t = 5\ln 2 \approx 3{,}47$ **semaines**. Ce temps ne dépend pas de la surface de départ.
4. $2\,\mathrm{e}^{0{,}2t} = 100 \iff \mathrm{e}^{0{,}2t} = 50 \iff t = 5\ln 50 \approx 19{,}56$. Le lac est couvert **au cours de la vingtième semaine**.
5. La surface double en $3{,}47$ semaines environ. Donc, $3{,}47$ semaines avant, **la moitié du lac** est couverte, soit 50 mètres carrés.

Une solution de BarroTech

Exercice 11

1.
   - **a.** Solution constante : $-\dfrac{6}{3} = -2$. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{3x} - 2$.
   - **b.** Solution constante : $\dfrac{5}{2}$. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{5}{2}$. $y(0) = C + \dfrac{5}{2} = 0$ donne $C = -\dfrac{5}{2}$: $x \mapsto \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$.
   - **c.** $y' = -\dfrac{1}{2}\,y + 2$. Solution constante : 4. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x/2} + 4$.
   - **d.** $y' = 0{,}5y + 1$. Solution constante : -2. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{0{,}5x} - 2$. $y(0) = C - 2 = 3$ donne $C = 5$: $x \mapsto 5\,\mathrm{e}^{0{,}5x} - 2$.
2. En **b**, $a < 0$: la limite est $\dfrac{5}{2}$, la valeur d'équilibre. En **d**, $a > 0$ et $C > 0$: la limite est $+\infty$.

Exercice 12

1. Quand B est proche de 100, B' est proche de 0 : la charge ralentit fortement en fin de course.
2. $B' = -0{,}02\,B + 2$. Solution constante : $\dfrac{2}{0{,}02} = 100$. Donc $B(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 100$, et $B(0) = C + 100 = 10$ donne $C = -90$: $B(t) = 100 - 90\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$.
3. $B'(t) = 1{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} > 0$: B est strictement croissante. $\lim\limits_{t\to+\infty} B(t) = 100$: le niveau se rapproche de $100\,\%$ sans jamais l'atteindre, selon ce modèle.
4. $B(60) = 100 - 90\,\mathrm{e}^{-1{,}2} \approx 72{,}9\,\%$.
5. $100 - 90\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 80 \iff \mathrm{e}^{-0{,}02t} = \dfrac{2}{9} \iff t = 50\ln\left(\dfrac{9}{2}\right) \approx 75{,}2$. Il faut environ 75 **minutes**.

Exercice 13

1. $p'(x) = 2$ et $-p(x) + 2x + 3 = -2x - 1 + 2x + 3 = 2$: p est solution. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$. $y(0) = C + 1 = 4$ donne $C = 3$: $x \mapsto 3\,\mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.
2. $p'(x) = -2\,\mathrm{e}^{2x}$ et $p(x) - \mathrm{e}^{2x} = -2\,\mathrm{e}^{2x}$: p est solution. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$. $y(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$: $x \mapsto \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$.
3. $p'(x) + p(x) = \cos x + \sin x$: p est solution. L'équation s'écrit $y' = -y + \cos x + \sin x$. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + \sin x$. $y(0) = C = 2$: $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{-x} + \sin x$.
4. $p'(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x} + 6x\,\mathrm{e}^{2x}$ et $2p(x) + 3\,\mathrm{e}^{2x} = 6x\,\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{2x}$: p est solution. Solutions : $x \mapsto (3x + C)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 14

1. $p'(x) = \alpha$, et (E) donne $\alpha = -2\alpha x - 2\beta + 6x + 1$ pour tout réel x, soit $(6 - 2\alpha)x + 1 - 2\beta - \alpha = 0$. Donc $\alpha = 3$, puis $1 - 2\beta - 3 = 0$, soit $\beta = -1$: $p(x) = 3x - 1$.
2. Solutions : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x - 1$. $f(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$: $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 3x - 1$.
3. En $+\infty$: $\mathrm{e}^{-2x} \to 0$ et $3x - 1 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$, on pose $X = -2x$, qui tend vers $+\infty$: $f(x) = \mathrm{e}^{X} - \dfrac{3}{2}X - 1 = X\left(\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X} - \dfrac{3}{2}\right) - 1$, et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
4. $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3$. Or $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{-2x} < \dfrac{3}{2} \iff x > -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. f est strictement décroissante, puis strictement croissante. Son minimum, en $x_0 = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2} \approx -0{,}203$, vaut
$$f(x_0) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} \approx -0{,}108.$$
5. $f(x) - (3x - 1) = \mathrm{e}^{-2x} > 0$ pour tout réel x : la courbe de f est strictement au-dessus de la droite.

Exercice 15

1. Les primitives de $x \mapsto 2x$ sont $x \mapsto x^2 + c$, et $y(0) = 1$ donne $c = 1$. Solution : $y(x) = x^2 + 1$, donc $y(2) = 5$.
2. $y_{k+1} = y_k + 0{,}5 \times 2x_k$:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,5	1	1,5	2
y_k	1	1	1,5	2,5	4

3. Avec $h = 0{,}25$, on trouve successivement 1 ; 1 ; $1{,}125$; $1{,}375$; $1{,}75$; $2{,}25$; $2{,}875$; $3{,}625$; $4{,}5$. L'écart passe de 1 à $0{,}5$: **le pas et l'écart sont divisés par deux**.
4. On écrit :

```
def f(x):
    return 2 * x

X, Y = euler(f, 0, 1, 0.01, 200)
print(Y[200])
```

Il faut 200 pas pour aller de 0 à 2 avec un pas de $0{,}01$. On obtient $4{,}98$ (l'écran affiche `4.9799999999999995` à cause des arrondis de la machine).

Une solution de BarroTech

Exercice 16

1. $y' = -y + 2$: solution constante 2, donc $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + 2$, et $y(0) = C + 2 = 0$ donne $C = -2$: $y(x) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $y(2) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-2} \approx 1{,}729$.
2. $y_{k+1} = y_k + h\,(-y_k + 2) = (1 - h)\,y_k + 2h$.
3. Avec $h = 0{,}5$: $y_{k+1} = 0{,}5\,y_k + 1$, d'où $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}5$, $y_3 = 1{,}75$, $y_4 = 1{,}875$.
4. $v_{k+1} = y_{k+1} - 2 = (1 - h)\,y_k + 2h - 2 = (1 - h)(y_k - 2) = (1 - h)\,v_k$. La suite (v_k) est géométrique de raison $1 - h$, de premier terme $v_0 = -2$. Donc $v_k = -2(1 - h)^k$ et $y_k = 2 - 2(1 - h)^k$.
5. Si $0 < h < 1$, alors $0 < 1 - h < 1$, donc $(1 - h)^k \to 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = 2$. La solution exacte a la même limite en $+\infty$: 2, la valeur d'équilibre.
6. `X, Y = euler2(-1, 2, 0, 0, 0.01, 200)`, puis `print(Y[200])` : on obtient $1{,}732$ environ. L'écart avec la valeur exacte est d'environ $1{,}732 - 1{,}729 = 0{,}003$.