Fonctions sinus et cosinus

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée, réglée en radians.

Leçon 1 : du cercle aux fonctions sinus et cosinus

Exercice 1 : valeurs remarquables et angles associés

1. Donner la valeur exacte, sans calculatrice :
   - **a.** $\cos\dfrac{2\pi}{3}$
   - **b.** $\sin\dfrac{5\pi}{6}$
   - **c.** $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
   - **d.** $\sin\dfrac{7\pi}{6}$
   - **e.** $\cos\dfrac{11\pi}{3}$
   - **f.** $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$
2.
   - **a.** On sait que $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et que $\sin x = \dfrac{3}{5}$. Calculer $\cos x$.
   - **b.** On sait que $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ et que $\cos y = \dfrac{5}{13}$. Calculer $\sin y$.
3. Simplifier, pour tout réel x :
   - **a.** $A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$
   - **b.** $B(x) = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
4. Montrer que, pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

Exercice 2 : parité, périodicité, lecture sur le cercle

1. Dire si chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$, est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre.
   - **a.** $f : x \mapsto x^2 + \cos x$
   - **b.** $g : x \mapsto x \sin x$
   - **c.** $h : x \mapsto x + \sin x$
   - **d.** $k : x \mapsto \sin x + \cos x$ (on pourra calculer $k\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$)
2. Montrer que $x \mapsto \cos(3x)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, et que $x \mapsto \sin(\pi x)$ est périodique de période 2.
3. On considère $m : x \mapsto \sin^2 x$.
   - **a.** Montrer que m est paire et périodique de période π.
   - **b.** Sur quel intervalle suffit-il de tracer sa courbe ? Par quelles transformations obtient-on le reste ?
   - **c.** Calculer $m(0)$, $m\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $m\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
4. Quand x va de $\frac{\pi}{2}$ à π, comment le point M se déplace-t-il sur le cercle ? En déduire, sans calcul, comment évoluent $\cos x$ et $\sin x$ sur cet intervalle.

Leçon 2 : dérivées de sinus et cosinus

Une solution de BarroTech

Exercice 3 : calculer des dérivées

1. Calculer la dérivée de chaque fonction, sur l'intervalle indiqué ou sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** $3\sin x - 2\cos x$
   - **b.** $\sin(5x)$
   - **c.** $\cos(\pi x)$
   - **d.** $4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
   - **e.** $x\cos x$
   - **f.** $\sin^2 x$
   - **g.** $\cos^3 x$
   - **h.** $\cos\left(x^2 + 1\right)$
   - **i.** $\mathrm{e}^{\sin x}$
   - **j.** $\frac{\sin x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
   - **k.** $\frac{1}{2 + \cos x}$
2. Soit $f(x) = \sin(2x)$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
3. En reconnaissant un nombre dérivé en 0, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x}$.

Exercice 4 : la balançoire

Dans un parc, un enfant se balance. Sa position horizontale par rapport au point le plus bas, en mètres, est modélisée par

$$x(t) = 1{,}2\sin(1{,}5\,t),$$

où $t \geq 0$ est le temps en secondes.

1. Calculer $x(0)$. Quelle est la valeur maximale de $x(t)$? À quel instant est-elle atteinte pour la première fois ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.
2. Déterminer la période du mouvement, puis une valeur approchée au centième.
3. La vitesse est $v(t) = x'(t)$. Calculer $v(t)$ et $v(0)$. Convertir $v(0)$ en kilomètres par heure.
4. Que vaut la vitesse à l'instant trouvé à la question 1 ? Interpréter.
5. L'accélération est $a(t) = v'(t)$. Calculer $a(t)$, puis montrer que $a(t) = -2{,}25\,x(t)$. Que peut-on dire du sens de l'accélération par rapport au déplacement ?

Leçon 3 : variations et courbes

Exercice 5 : la fonction $x \mapsto \sin(2x)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$.

1. Montrer que f est impaire et périodique de période π. Pourquoi peut-on l'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et où ils sont atteints.
5. Calculer $f''(x)$. Montrer que f est concave sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis en déduire que $\sin(2x) \leq 2x$ sur cet intervalle.

Exercice 6 : des inégalités utiles

1. Soit $g(x) = x - \sin x$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $g'(x)$, étudier le sens de variation de g, et en déduire que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. Soit $h(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $h'(x)$, puis montrer à l'aide de la question 1 que $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
3. Expliquer pourquoi cette dernière inégalité reste vraie pour tout réel x.
4. En déduire un encadrement de $\cos 0{,}2$, et le comparer à la valeur donnée par la calculatrice.
5. Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$: $\quad 0 \leq \dfrac{1-\cos x}{|x|} \leq \dfrac{|x|}{2}$. Retrouver ainsi que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.
6. La fonction $\sin$ est concave sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. En considérant le segment qui joint les points de sa courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$, montrer que $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$ sur cet intervalle. Vérifier pour $x = 1$.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Exercice 7 : équations

1. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$. Donner des valeurs exactes pour les questions **a** à **f**, et des valeurs approchées au millième pour les questions **g** et **h**.
   - **a.** $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - **b.** $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
   - **c.** $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - **d.** $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
   - **e.** $\cos x = -1$
   - **f.** $\sin x = \dfrac{3}{2}$
   - **g.** $\cos x = 0{,}6$
   - **h.** $\sin x = -0{,}2$
2. Résoudre sur $[0\,;2\pi]$:
   - **a.** $\cos x = \dfrac{1}{2}$
   - **b.** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Une solution de BarroTech

3. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$:
   - **a.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$
   - **b.** $\sin(2x) = 1$
4. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$ l'équation $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, en posant $X = \sin x$.

Exercice 8 : la grande roue

Une grande roue de fête foraine a un rayon de 20 mètres, et son axe est à 22 mètres du sol. Elle tourne à vitesse constante. Une nacelle part du point le plus bas à l'instant $t = 0$. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le départ, est

$$h(t) = 22 - 20\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right), \qquad t \in [0\,;120].$$

1. Calculer $h(0)$ et $h(60)$. Interpréter.
2. Vérifier que $h(t + 120) = h(t)$ pour tout réel t. Combien de temps dure un tour ?
3. Déterminer les instants où la nacelle est à la hauteur de l'axe.
4. Déterminer les instants où la nacelle est à 32 mètres du sol. Pendant combien de temps est-elle au-dessus de 32 mètres ?
5. Déterminer, au dixième de seconde près, les instants où la nacelle est à 7 mètres du sol.
6. Calculer $h'(t)$. À quel instant de la montée la nacelle monte-t-elle le plus vite ? À quelle vitesse ?

Leçon 5 : résoudre $\cos x \leq a$ et l'analogue avec sinus

Exercice 9 : inéquations

1. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$. On pourra s'aider du cercle ou de la courbe.
   - **a.** $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - **b.** $\cos x < -\dfrac{1}{2}$
   - **c.** $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - **d.** $\sin x \leq 0$
   - **e.** $\cos x \leq 2$
   - **f.** $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$
   - **g.** $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$
2. Dresser le tableau de signes de $(2\cos x - 1)\sin x$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

Exercice 10 : la durée du jour

Dans une ville française, la durée du jour, en heures, est modélisée par

$$D(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

où $t \in [-6\,;6]$ est le temps en mois, compté depuis l'équinoxe de printemps.

1. Calculer $D(0)$, $D(3)$ et $D(-3)$. À quels moments de l'année ces trois valeurs correspondent-elles ?
2. Résoudre $D(t) \geq 14$. Pendant combien de mois les jours durent-ils au moins 14 heures ?
3. Résoudre $D(t) \leq 10$.
4. Calculer $D'(t)$, puis étudier son signe sur $[-6\,;6]$ et donner le sens de variation de D.
5. Calculer $D'(0)$. En comptant un mois de 30 jours, de combien de minutes les jours s'allongent-ils chaque jour autour de l'équinoxe, selon ce modèle ?

Leçon 6 : étudier une fonction trigonométrique

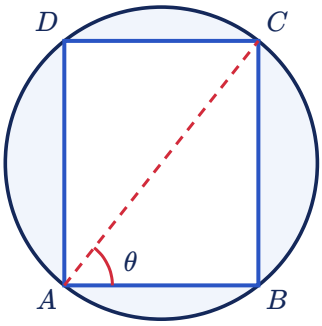
Exercice 11 : avec l'exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

1. Montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
2. Étudier le signe de $\cos x - \sin x$ sur $[0\,;\pi]$. On comparera, sur le cercle, l'abscisse et l'ordonnée du point M.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$. Donner la valeur exacte du maximum, puis une valeur approchée au millième.
4. Montrer que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12 : la poutre taillée dans un tronc

Un menuisier taille une poutre à section rectangulaire $ABCD$ dans un tronc cylindrique de diamètre 40 cm. Les quatre sommets de la section sont sur le cercle de diamètre $[AC]$. On note $\theta \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'angle $\widehat{BAC}$.



Coupe du tronc et de la poutre

1. Justifier que la largeur vaut $AB = 40\cos\theta$ et que la hauteur vaut $BC = 40\sin\theta$.
2. L'aire de la section est $A(\theta) = 1600\sin\theta\cos\theta$.
   - **a.** Montrer que $A'(\theta) = 1600(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)$.
   - **b.** En déduire les variations de A, puis la section la plus grande. Quelle est sa forme ?
3. La résistance de la poutre à la flexion est proportionnelle à $R(\theta) = AB \times BC^2 = 64\,000\cos\theta\sin^2\theta$.
   - **a.** Montrer que $R'(\theta) = 64\,000\sin\theta\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.
   - **b.** En déduire que R admet un maximum en un réel θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   - **c.** Calculer les dimensions de la poutre la plus résistante, en valeurs exactes, puis au millimètre près. Calculer le rapport $\dfrac{BC}{AB}$.

Une solution de BarroTech