Fonctions sinus et cosinus

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *On se ramène à une valeur remarquable, avec les angles associés et la période 2π.*

- **a.** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.
- **b.** $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.
- **c.** $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- **d.** $\sin\dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.
- **e.** $\dfrac{11\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi$, donc $\cos\dfrac{11\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.
- **f.** $-\dfrac{17\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} - 4\pi$, donc $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

2.

- **a.** $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$. Comme $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos x \leq 0$: $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.
- **b.** $\sin^2 y = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$. Comme $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$, $\sin y \leq 0$: $\sin y = -\dfrac{12}{13}$.

Une solution de BarroTech

3.

- **a.** $A(x) = -\cos x + \cos x + \cos x = \cos x$.
- **b.** $B(x) = -\sin x + \sin x + \sin x = \sin x$.

4. On développe : $\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 2$.

Exercice 2

1. *On compare $f(-x)$ à $f(x)$ et à $-f(x)$.*

- **a.** $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$: **paire**.
- **b.** $g(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = g(x)$: **paire**.
- **c.** $h(-x) = -x - \sin x = -h(x)$: **impaire**.
- **d.** $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ et $k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Donc $k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ n'est égal ni à $k\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ni à $-k\left(\frac{\pi}{4}\right)$: **ni paire, ni impaire**.

2. $\cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x)$ et $\sin\big(\pi(x+2)\big) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x)$.

3.

- **a.** $m(-x) = \big(\sin(-x)\big)^2 = (-\sin x)^2 = m(x)$: m est paire. $m(x+\pi) = \big(\sin(x+\pi)\big)^2 = (-\sin x)^2 = m(x)$: elle est périodique de période π.
- **b.** Il suffit de la tracer sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées donne la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle de longueur π, puis les translations de vecteur $k\pi\,\vec{\imath}$ donnent le reste.
- **c.** $m(0) = 0$, $m\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ et $m\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4. M parcourt le quart de cercle de $(0\,;1)$ à $(-1\,;0)$. Son abscisse va de 0 à -1 : $\cos x$ diminue. Son ordonnée va de 1 à 0 : $\sin x$ diminue aussi. Les deux restent de signe constant : $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$.

Une solution de BarroTech

Exercice 3

1.
   - **a.** $3\cos x + 2\sin x$.
   - **b.** $5\cos(5x)$.
   - **c.** $-\pi\sin(\pi x)$.
   - **d.** $-8\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
   - **e.** *Produit :* $\cos x - x\sin x$.
   - **f.** $\left(u^2\right)' = 2u'u$ *:* $2\cos x\sin x$.
   - **g.** $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$ *:* $-3\sin x\cos^2 x$.
   - **h.** $(\cos u)' = -u'\sin u$ *:* $-2x\sin\left(x^2+1\right)$.
   - **i.** $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$ *:* $\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$.
   - **j.** *Quotient :* $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
   - **k.** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ *:* $\dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$.
2. $f'(x) = 2\cos(2x)$. En 0 : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$, d'où $y = 2x$. En $\dfrac{\pi}{2}$: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2$, d'où $y = -2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, soit $y = -2x + \pi$.
3. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ *tend vers* $f'(0)$. Avec $f(x) = \sin(3x)$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3\cos 0 = 3$, donc la limite vaut 3. Avec $g(x) = \cos(2x)$: $g(0) = 1$ et $g'(0) = -2\sin 0 = 0$, donc la limite vaut 0.

Une solution de BarroTech

Exercice 4

1. $x(0) = 0$: l'enfant est au point le plus bas. La valeur maximale de $x(t)$ est $1{,}2$ mètre, atteinte quand $\sin(1{,}5\,t) = 1$, c'est-à-dire pour la première fois quand $1{,}5\,t = \dfrac{\pi}{2}$, soit $t = \dfrac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ s.
2. La période vaut $\dfrac{2\pi}{1{,}5} = \dfrac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$ s.
3. $v(t) = 1{,}2 \times 1{,}5\cos(1{,}5\,t) = 1{,}8\cos(1{,}5\,t)$ et $v(0) = 1{,}8$ m/s, soit $1{,}8 \times 3{,}6 = 6{,}48$ km/h.
4. $v\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1{,}8\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$: au point le plus éloigné, l'enfant s'arrête un instant avant de repartir dans l'autre sens.
5. $a(t) = -1{,}8 \times 1{,}5\sin(1{,}5\,t) = -2{,}7\sin(1{,}5\,t)$. Or $-2{,}25 \times 1{,}2 = -2{,}7$, donc $a(t) = -2{,}25\,x(t)$. L'accélération est de signe opposé au déplacement : elle ramène l'enfant vers le point le plus bas.

Exercice 5

1. $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$: f est impaire. $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = f(x)$: elle est périodique de période π. On peut l'étudier sur un intervalle de longueur π, comme $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis se limiter à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par imparité.
2. $f'(x) = 2\cos(2x)$.
3. Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0\,;\pi]$, et $\cos(2x) \geq 0 \iff 2x \leq \frac{\pi}{2} \iff x \leq \frac{\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	croissante	1	décroissante	0

4. Le maximum vaut 1, atteint en $\frac{\pi}{4}$. Par imparité, le minimum vaut -1, atteint en $-\frac{\pi}{4}$.
5. $f''(x) = -4\sin(2x)$. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0\,;\pi]$, donc $\sin(2x) \geq 0$ et $f''(x) \leq 0$: f est concave. Sa courbe est sous sa tangente en 0, d'équation $y = 2x$: $\sin(2x) \leq 2x$.

Exercice 6

1. $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$: g est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $g(0) = 0$, $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $\sin x \leq x$.
2. $h'(x) = -\sin x + x = g(x) \geq 0$ d'après la question 1 : h est croissante. Comme $h(0) = 0$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
3. Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ sont paires : l'inégalité vraie pour $x \geq 0$ l'est aussi pour $-x$.
4. $1 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}98$, donc $0{,}98 \leq \cos 0{,}2 \leq 1$. La calculatrice donne $\cos 0{,}2 \approx 0{,}98007$.
5. Pour $x \neq 0$, on a $1 - \cos x \geq 0$, et la question 2 donne $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$. On divise par $|x| > 0$: $0 \leq \frac{1-\cos x}{|x|} \leq \frac{|x|}{2}$. Comme $\frac{|x|}{2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, le théorème des gendarmes montre que $\frac{1-\cos x}{|x|}$ tend vers 0, et donc aussi $\frac{1-\cos x}{x}$, qui a la même valeur absolue.
6. Les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont $(0\,;0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}\,;1\right)$: la sécante a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Une fonction concave est au-dessus de ses sécantes entre les deux points (chapitre 5) : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour $x = 1$: $\sin 1 \approx 0{,}841$ et $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

Une solution de BarroTech

Exercice 7

1.
   - **a.** $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$: $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right\}$.
   - **b.** $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$: $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.
   - **c.** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.
   - **d.** $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6}\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\right\}$.
   - **e.** $\mathcal{S} = \{-\pi\,;\,\pi\}$: un seul point du cercle, mais deux réels de l'intervalle.
   - **f.** $\dfrac{3}{2} > 1$: $\mathcal{S} = \varnothing$.
   - **g.** $\alpha \approx 0{,}927$: $x \approx -0{,}927$ ou $x \approx 0{,}927$.
   - **h.** $\beta \approx -0{,}201$ et $-\pi - \beta \approx -2{,}940$: $x \approx -2{,}940$ ou $x \approx -0{,}201$.
2.
   - **a.** $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$.
   - **b.** $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$: ce sont $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi$.
3.
   - **a.** On pose $X = x - \dfrac{\pi}{3}$, qui décrit $\left[-\dfrac{4\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$. $\cos X = \dfrac{1}{2}$ donne $X = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $X = \dfrac{\pi}{3}$, d'où $x = 0$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
   - **b.** $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$: $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $2X^2 - X - 1 = (X-1)(2X+1)$. Donc $\sin x = 1$ ou $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, et $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6}\,;-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 8

1. $h(0) = 22 - 20 = 2$: la nacelle part à 2 mètres du sol. $h(60) = 22 - 20\cos\pi = 42$: au bout d'une minute, elle est au sommet, à 42 mètres.
2. $\dfrac{\pi(t+120)}{60} = \dfrac{\pi t}{60} + 2\pi$, donc $h(t+120) = h(t)$. Un tour dure 120 secondes, soit 2 minutes.
3. $h(t) = 22 \iff \cos\left(\dfrac{\pi t}{60}\right) = 0$. Pour $t \in [0\,;120]$, $X = \dfrac{\pi t}{60}$ décrit $[0\,;2\pi]$: $X = \dfrac{\pi}{2}$ ou $X = \dfrac{3\pi}{2}$, soit $t = 30$ **ou** $t = 90$.
4. $h(t) = 32 \iff \cos X = -\dfrac{1}{2} \iff X = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $X = \dfrac{4\pi}{3}$, soit $t = 40$ **ou** $t = 80$. La nacelle est au-dessus de 32 mètres pendant 40 **secondes**.
5. $h(t) = 7 \iff \cos X = 0{,}75$. La calculatrice donne $X \approx 0{,}723$, et l'autre solution est $2\pi - X$. D'où $t = \dfrac{60X}{\pi} \approx 13{,}8$ s, et $t \approx 120 - 13{,}8 = 106{,}2$ s.
6. $h'(t) = 20 \times \dfrac{\pi}{60}\sin\left(\dfrac{\pi t}{60}\right) = \dfrac{\pi}{3}\sin\left(\dfrac{\pi t}{60}\right)$. Elle est maximale quand le sinus vaut 1, en $t = 30$, quand la nacelle est à la hauteur de l'axe. La vitesse de montée vaut alors $\dfrac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ m/s.

Exercice 9

1.
   - **a.** $\alpha = \dfrac{\pi}{4} : \mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   - **b.** $\alpha = \dfrac{2\pi}{3} : \mathcal{S} = \left[-\pi ; -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.
   - **c.** $\mathcal{S} = \left]\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right[$.
   - **d.** $\mathcal{S} = [-\pi ; 0] \cup \{\pi\}$. *Attention : $\sin \pi = 0$, donc π est solution.*
   - **e.** $\cos x \leq 1 < 2$ pour tout x : $\mathcal{S} = [-\pi ; \pi]$.
   - **f.** $\mathcal{S} = \left[-\pi ; -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6} ; \pi\right]$.
   - **g.** $\cos x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} : \mathcal{S} = \left[-\pi ; -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6} ; \pi\right]$.
2. $2\cos x - 1 > 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right[$, et $\sin x > 0$ sur $]0 ; \pi[$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$(2\cos x - 1)\sin x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Une solution de BarroTech

Exercice 10

1. $D(0) = 12$: à l'équinoxe, le jour dure 12 heures. $D(3) = 12 + 4\sin\dfrac{\pi}{2} = 16$: c'est le jour le plus long, au solstice d'été. $D(-3) = 12 - 4 = 8$: c'est le jour le plus court, au solstice d'hiver.
2. $D(t) \geq 14 \iff \sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \geq \dfrac{1}{2}$. Pour $t \in [-6 ; 6]$, $X = \dfrac{\pi t}{6}$ décrit $[-\pi ; \pi]$: $\dfrac{\pi}{6} \leq X \leq \dfrac{5\pi}{6}$, soit $1 \leq t \leq 5$. Les jours durent au moins 14 heures pendant 4 **mois**.
3. $D(t) \leq 10 \iff \sin X \leq -\dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{5\pi}{6} \leq X \leq -\dfrac{\pi}{6}$, soit $-5 \leq t \leq -1$.
4. $D'(t) = 4 \times \dfrac{\pi}{6}\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$. Elle est du signe de $\cos X$: positive sur $]-3 ; 3[$, négative sur $[-6 ; -3[$ et sur $]3 ; 6]$. Donc D décroît sur $[-6 ; -3]$, croît sur $[-3 ; 3]$, et décroît sur $[3 ; 6]$.
5. $D'(0) = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ heures par mois. Avec un mois de 30 jours : $\dfrac{2\pi}{3} \times \dfrac{60}{30} \approx 4{,}2$ minutes de plus par jour.

Exercice 11

1. Dérivée d'un produit : $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
2. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, cos décroît et sin croît, et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$: donc $\cos x > \sin x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ et $\cos x < \sin x$ sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos x < 0 \leq \sin x$. Ainsi $\cos x - \sin x > 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ et $\cos x - \sin x < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$.
3. $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $\cos x - \sin x$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	croissante	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\pi/4}$	décroissante	0

Le maximum vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\pi/4} \approx 0{,}322$.

4. On a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, d'où l'encadrement. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 12

1. L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et $[AC]$ est un diamètre : dans le triangle ABC, rectangle en B avec $AC = 40$, on a $\cos\theta = \frac{AB}{40}$ et $\sin\theta = \frac{BC}{40}$.
2. - **a.** $A'(\theta) = 1600\left(\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\right) = 1600\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 1600(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)$.
   - **b.** Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta + \sin\theta > 0$, et $\cos\theta - \sin\theta > 0 \iff \theta < \frac{\pi}{4}$. A croît sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Le maximum est $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1600 \times \frac{1}{2} = 800$ cm². Alors $AB = BC = 20\sqrt{2} \approx 28{,}3$ cm : la section est un **carré**.
3. - **a.** $R'(\theta) = 64\,000\left(-\sin\theta\sin^2\theta + \cos\theta \times 2\sin\theta\cos\theta\right) = 64\,000\sin\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$. Or $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, d'où $R'(\theta) = 64\,000\sin\theta\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.
   - **b.** Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\theta > 0$ et $\cos\theta > 0$. Donc $R'(\theta) > 0 \iff \cos^2\theta > \frac{1}{3} \iff \cos\theta > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Comme cos est strictement décroissante, il existe un unique θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $\theta_0 \approx 0{,}955$. R croît sur $]0\,;\theta_0]$ et décroît sur $\left[\theta_0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: son maximum est atteint en θ_0.
   - **c.** $AB = \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 23{,}1$ cm. Comme $\sin\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, on a $BC = \frac{40\sqrt{6}}{3} \approx 32{,}7$ cm. Le rapport vaut $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.