Loi binomiale

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée. Les probabilités sont arrondies au millième, sauf indication contraire.

Leçon 1 : rappels sur les probabilités conditionnelles

Exercice 1 : visiteurs d'un musée

Un dimanche, un musée reçoit 500 visiteurs. On note G : « le visiteur suit une visite guidée » et E : « le visiteur est un enfant ».

	E	$\overline{E}$	**Total**
G	45	105	150
$\overline{G}$	80	270	350
Total	125	375	500

On choisit un visiteur au hasard.

1. Calculer $P(G)$, $P(E)$ et $P(G \cap E)$.
2. Calculer $P_G(E)$ et $P_E(G)$. Traduire chacune par une phrase.
3. Les événements G et E sont-ils indépendants ?
4. Calculer $P(G \cup E)$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : un test et des faux positifs

Dans un élevage, $4\,\%$ des brebis sont porteuses d'un parasite. Un test rapide est positif pour $95\,\%$ des brebis porteuses, mais aussi pour $3\,\%$ des brebis non porteuses. On choisit une brebis au hasard ; M : « la brebis est porteuse », T : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré de la situation.
2. Calculer $P(M \cap T)$.
3. Montrer que $P(T) = 0{,}0668$.
4. Le test d'une brebis est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du parasite ? Commenter.
5. Le test d'une brebis est négatif. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas porteuse ?

Leçon 2 : succession d'épreuves indépendantes

Exercice 3 : un dé, une pièce, puis trois trains

Partie A. On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4, puis une pièce équilibrée.

1. Écrire l'ensemble Ω des issues comme un produit cartésien, puis donner $\mathrm{Card}(\Omega)$.
2. Calculer la probabilité de l'issue $(3\,;F)$, puis celle d'obtenir un nombre pair et pile.

Partie B. Pour aller voir sa grand-mère, Hugo prend trois trains successifs. Ils sont à l'heure avec les probabilités respectives $0{,}9$, $0{,}8$ et $0{,}95$, indépendamment les uns des autres.

1. Représenter la situation par un arbre à trois niveaux.
2. Calculer la probabilité que les trois trains soient à l'heure.
3. Calculer la probabilité qu'exactement un train soit en retard.
4. Calculer la probabilité qu'au moins un train soit en retard.

Exercice 4 : une boîte de chocolats

Une boîte contient 10 chocolats : 6 au lait (L) et 4 noirs (N). Léo en prend un au hasard, le mange, puis en prend un second. On note N_1 : « le premier est noir » et N_2 : « le second est noir ».

1. Construire un arbre pondéré. Pourquoi les probabilités du second niveau sont-elles des probabilités conditionnelles ?
2. Calculer $P(N_1 \cap N_2)$.
3. Calculer $P(N_2)$ avec la formule des probabilités totales.
4. Le second chocolat est noir. Quelle est la probabilité que le premier l'ait été aussi ?
5. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?
6. Léo prend trois chocolats à la suite, sans remise. Calculer la probabilité qu'ils soient tous au lait.

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Exercice 5 : des épreuves de Bernoulli

1. Pour chaque expérience, dire si c'est une épreuve de Bernoulli. Si oui, préciser le succès et le paramètre p.
   - **a.** On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; on regarde si c'est un cœur.
   - **b.** On lance un dé équilibré à six faces et on note le nombre obtenu.
   - **c.** On lance un dé équilibré à six faces ; on regarde si le résultat est 1 ou 2.
   - **d.** On fait tourner une roue partagée en trois secteurs : rouge (probabilité $\frac{1}{2}$), bleu ($\frac{1}{3}$) et vert ($\frac{1}{6}$) ; on regarde si la roue s'arrête sur le vert.
2. Dans la situation **a**, X vaut 1 si la carte est un cœur et 0 sinon. Donner la loi de X, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Pour une variable de Bernoulli de paramètre p, on a $V(X) = p(1-p)$. Pour quelle valeur de p cette variance est-elle la plus grande ? Que vaut-elle alors ?

Exercice 6 : trois fléchettes

Nora lance trois fléchettes. Chacune atteint la zone centrale avec la probabilité $0{,}3$, indépendamment des autres. On code un lancer réussi par 1 et un lancer raté par 0.

1. Justifier que l'expérience est un schéma de Bernoulli et préciser ses paramètres.
2. Écrire les huit issues sous forme de triplets de $\{0\,;1\}$. Combien y en a-t-il, et pourquoi ?
3. Calculer la probabilité de l'issue $(1\,;1\,;1)$, puis celle de l'issue $(0\,;0\,;0)$.
4. Calculer la probabilité de l'issue $(1\,;0\,;1)$. Quelles autres issues ont la même probabilité ?
5. En déduire la probabilité que Nora atteigne exactement deux fois la zone centrale, puis au moins une fois.

Leçon 4 : la loi binomiale

Exercice 7 : répondre au hasard

Un questionnaire comporte 5 questions indépendantes. Pour chacune, 4 réponses sont proposées et une seule est juste. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la valeur exacte de $P(X = 0)$, puis de $P(X = 2)$.
3. Recopier et compléter le tableau de la loi de X (valeurs arrondies au millième).

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$						

4. Quelle est la valeur la plus probable de X ?
5. Calculer la probabilité que le candidat ait au moins trois bonnes réponses. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

Exercice 8 : loi binomiale ou pas ?

1. Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale ; si oui, donner ses paramètres.
   - **a.** On lance 10 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de faces.
   - **b.** Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules blanches. On tire 4 boules successivement **avec remise** ; X est le nombre de boules rouges.
   - **c.** Même urne, 4 tirages successifs **sans remise** ; X est le nombre de boules rouges.
   - **d.** On lance un dé jusqu'à obtenir un 6 ; X est le nombre de lancers effectués.
   - **e.** On lance trois dés ; X est la somme des nombres obtenus.
2. **Refaire la démonstration sur un exemple.** On répète 4 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p, et X compte les succès.
   - **a.** Écrire les six issues qui comportent exactement deux succès. Pourquoi y en a-t-il $\binom{4}{2}$?
   - **b.** Calculer la probabilité de chacune, puis en déduire $P(X = 2)$ en fonction de p.
   - **c.** Calculer $P(X = 2)$ pour $p = 0{,}3$.

Une solution de Barrolech

Leçon 5 : calculer avec la loi binomiale

Exercice 9 : stylos défectueux

Une usine fabrique des stylos ; $2\,\%$ d'entre eux sont défectueux. On prélève 50 stylos dans la production, assez grande pour que le prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note X le nombre de stylos défectueux du lot.

1. Justifier que X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}02)$.
2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
3. Calculer la probabilité que le lot contienne au plus deux stylos défectueux.
4. Calculer la probabilité qu'il en contienne au moins trois.
5. Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$ en écrivant le calcul avec deux probabilités cumulées.

Exercice 10 : une enquête et un programme

Dans une ville, $35\,\%$ des foyers ont un chien. On interroge 40 foyers choisis au hasard ; le choix est assimilé à un tirage avec remise. X est le nombre de foyers interrogés qui ont un chien.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $P(X = 14)$, $P(X \leqslant 10)$, $P(10 \leqslant X \leqslant 18)$ et $P(X > 18)$.
3. On dispose des fonctions `proba` et `cumul` du cours.

```
from math import comb
```

Une solution de BarroTech

```
def proba(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)

def cumul(n, p, k):
    return sum([proba(n, p, i) for i in range(k + 1)])
```

- **a.** Quelle probabilité l'instruction `cumul(40, 0.35, 18) - cumul(40, 0.35, 9)` calcule-t-elle ?
- **b.** Écrire une instruction qui calcule $P(X \geqslant 12)$, puis donner sa valeur arrondie au millième.

Leçon 6 : seuil, comparaison, optimisation

Exercice 11 : colis endommagés

Une entreprise de livraison constate que chaque colis arrive endommagé avec la probabilité $0{,}02$, indépendamment des autres.

1. Un livreur transporte n colis. Montrer que la probabilité qu'au moins un colis arrive endommagé est $1 - 0{,}98^n$.
2. À partir de combien de colis cette probabilité dépasse-t-elle $0{,}5$? Résoudre avec le logarithme népérien, puis vérifier.
3. **Comparaison.** Deux fournisseurs envoient des lots. Chez le fournisseur A, un lot compte 20 colis, endommagés chacun avec la probabilité $0{,}02$; chez le fournisseur B, un lot compte 10 colis, endommagés chacun avec la probabilité $0{,}04$. Les colis sont indépendants. Chez quel fournisseur un lot a-t-il la plus grande probabilité de n'avoir aucun colis endommagé ?

Exercice 12 : optimiser une probabilité

Lors d'une kermesse, un stand propose 10 parties indépendantes. L'organisateur règle la probabilité p de gagner une partie, avec $0 \leqslant p \leqslant 1$. Il souhaite que la probabilité qu'**exactement une** partie sur dix soit gagnée soit la plus grande possible.

1. Montrer que cette probabilité vaut $f(p) = 10\,p\,(1-p)^9$.
2. Montrer que, pour tout p de $[0\,;1]$, $f'(p) = 10\,(1-p)^8\,(1-10p)$.
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$. Pour quelle valeur de p la probabilité est-elle maximale ? Donner ce maximum arrondi au millième.
4. **Pour aller plus loin.** Avec n parties ($n \geqslant 2$), on pose $f_n(p) = n\,p\,(1-p)^{n-1}$. Montrer que f_n est maximale pour $p = \dfrac{1}{n}$.

Une solution de BarroTech

Leçon 7 : intervalles et surréservation

Exercice 13 : un dé est-il équilibré ?

On lance 60 fois un dé équilibré ; X est le nombre de 6 obtenus. Voici quelques probabilités cumulées de X.

k	4	5	15	16
$P(X \leqslant k)$	$0{,}020$	$0{,}051$	$0{,}966$	$0{,}984$

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec la méthode du cours (risque $\alpha = 0{,}05$ partagé en deux moitiés), déterminer un intervalle $I = [a\,;b]$ tel que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$.
3. Calculer $P(X \in I)$ à la calculatrice.
4. Un joueur obtient 19 fois le 6 en 60 lancers avec son dé. Ce résultat est-il rare pour un dé équilibré ?
5. Que renvoie l'instruction `intervalle(60, 1/6, 0.05)` du cours ?

Exercice 14 : un car de voyage

Un car a 50 places. L'agence sait que chaque client qui a réservé se présente au départ avec la probabilité $0{,}92$, indépendamment des autres.

1. L'agence vend 54 places. On note X le nombre de clients présents au départ. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer la probabilité que des clients présents n'aient pas de place.
3. On utilise la fonction `seuil` du cours. Que renvoie `seuil(54, 0.92, 0.05)` ? Interpréter.
4. L'agence veut que le risque de surréservation soit au plus $0{,}05$ avec les 50 places du car. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie le plus grand nombre de places que l'agence peut vendre, puis donner ce nombre.

```
def billets(places, p, alpha):
    n = places
    while 1 - cumul(n + 1, p, places) <= alpha:
        n = ...
    return n
```

Leçon 8 : simuler avec Python

Exercice 15 : une planche de Galton à six rangées

Une planche de Galton a 6 rangées de clous. À chaque clou, la bille part à droite ou à gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment ; les cases sont numérotées de 0 à 6 de gauche à droite.

1. Justifier que le numéro X de la case d'arrivée suit la loi $\mathcal{B}\left(6\,;\frac{1}{2}\right)$.
2. Donner la loi de X sous forme de fractions de dénominateur 64.
3. Calculer la probabilité que la bille arrive dans la case 3, puis dans l'une des cases 2, 3 ou 4.
4. On lâche 500 billes avec le programme ci-dessous, où `binomiale` est la fonction du cours.

```
E = [binomiale(6, 0.5) for i in range(500)]
print(E.count(3))
```

Quel nombre environ peut-on s'attendre à voir affiché ? Pourquoi ne peut-on pas prévoir le nombre exact ?

Exercice 16 : simuler un échantillon

On s'intéresse à une variable X de loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$.

1. Calculer $P(X \geqslant 5)$.
2. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la fréquence des valeurs supérieures ou égales à 5 dans un échantillon de taille N de X (`binomiale` est la fonction du cours).

```
def frequence(N):
    E = [binomiale(10, 0.3) for i in range(N)]
    nb = len([x for x in E if ...])
    return nb / N
```

3. Une exécution de `frequence(10000)` a affiché `0.1512`. Comparer avec la question 1.
4. Expliquer pourquoi la fonction suivante simule une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

```
from random import randint

def six():
    if randint(1, 6) == 6:
        return 1
    return 0
```