Loi binomiale

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les probabilités sont arrondies au millième.

Exercice 1

1. $P(G) = \dfrac{150}{500} = 0{,}3$; $P(E) = \dfrac{125}{500} = 0{,}25$; $P(G \cap E) = \dfrac{45}{500} = 0{,}09$.
2. *On se place dans la ligne ou la colonne de l'événement connu.* $P_G(E) = \dfrac{45}{150} = 0{,}3$: parmi les visiteurs guidés, $30\,\%$ sont des enfants. $P_E(G) = \dfrac{45}{125} = 0{,}36$: parmi les enfants, $36\,\%$ suivent une visite guidée.
3. $P(G) \times P(E) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075 \neq 0{,}09 = P(G \cap E)$: G et E **ne sont pas indépendants**. On le voit aussi avec $P_G(E) = 0{,}3 \neq 0{,}25 = P(E)$.
4. $P(G \cup E) = P(G) + P(E) - P(G \cap E) = 0{,}3 + 0{,}25 - 0{,}09 = 0{,}46$. On retrouve $\dfrac{45 + 105 + 80}{500} = \dfrac{230}{500}$.

Exercice 2

1. Premier niveau : M $(0{,}04)$ et $\overline{M}$ $(0{,}96)$. Second niveau : après M, T $(0{,}95)$ et $\overline{T}$ $(0{,}05)$; après $\overline{M}$, T $(0{,}03)$ et $\overline{T}$ $(0{,}97)$.
2. Règle du produit : $P(M \cap T) = 0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}038$.
3. M et $\overline{M}$ forment une partition : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}038 + 0{,}96 \times 0{,}03 = 0{,}038 + 0{,}0288 = 0{,}0668$.
4. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}038}{0{,}0668} \approx 0{,}569$. Même avec un test positif, la brebis n'est porteuse qu'avec une probabilité d'environ $0{,}57$: plus de quatre tests positifs sur dix sont des **faux positifs**, car le parasite est rare. Il ne faut pas confondre $P_T(M)$ avec $P_M(T) = 0{,}95$.
5. $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0668 = 0{,}9332$ et $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}96 \times 0{,}97 = 0{,}9312$, donc $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{0{,}9312}{0{,}9332} \approx 0{,}998$. Un test négatif est très fiable.

Une solution de BarroTech

Exercice 3

Partie A.

1. $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\} \times \{P\,;F\}$, et $\text{Card}(\Omega) = 4 \times 2 = 8$.
2. Les lancers sont indépendants : $P\big((3\,;F)\big) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$. Un nombre pair et pile : $\dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ (issues $(2\,;P)$ et $(4\,;P)$).

Partie B. On note H_i : « le train i est à l'heure ».

1. Arbre à trois niveaux ; au niveau i, les branches H_i et $\overline{H_i}$ portent $0{,}9$ et $0{,}1$, puis $0{,}8$ et $0{,}2$, puis $0{,}95$ et $0{,}05$.
2. *Épreuves indépendantes : on multiplie.* $P(H_1H_2H_3) = 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}95 = 0{,}684$.
3. Trois issues comportent exactement un retard : $0{,}1 \times 0{,}8 \times 0{,}95 = 0{,}076$; $0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}95 = 0{,}171$; $0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}05 = 0{,}036$. Elles sont incompatibles : $0{,}076 + 0{,}171 + 0{,}036 = 0{,}283$.
4. C'est le contraire de « les trois trains à l'heure » : $1 - 0{,}684 = 0{,}316$.

Exercice 4

1. Premier niveau : N_1 ($\frac{4}{10}$) et L_1 ($\frac{6}{10}$). Après un chocolat noir, il reste 3 noirs sur 9 : $P_{N_1}(N_2) = \frac{3}{9}$, $P_{N_1}(L_2) = \frac{6}{9}$. Après un chocolat au lait : $P_{L_1}(N_2) = \frac{4}{9}$, $P_{L_1}(L_2) = \frac{5}{9}$. Le contenu de la boîte au second tirage **dépend** du premier : ce sont des probabilités conditionnelles.
2. $P(N_1 \cap N_2) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{12}{90} = \dfrac{2}{15}$.
3. $P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(L_1 \cap N_2) = \dfrac{12}{90} + \dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{90} + \dfrac{24}{90} = \dfrac{36}{90} = \dfrac{2}{5}$.
4. $P_{N_2}(N_1) = \dfrac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{2}{15} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{3}$.
5. $P(N_1) \times P(N_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25} \neq \dfrac{2}{15}$: N_1 et N_2 **ne sont pas indépendants**.
6. $\dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} = \dfrac{120}{720} = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 5

1. **a.** Oui : succès « cœur », $p = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$. **b.** Non : l'expérience a six issues. **c.** Oui : succès « 1 ou 2 », $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. **d.** Oui : succès « vert », $p = \dfrac{1}{6}$; l'échec regroupe le rouge et le bleu ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$).
2. $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X = 0) = \dfrac{3}{4}$. $E(X) = p = \dfrac{1}{4}$; $V(X) = p(1-p) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$; $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{3}{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}433$.
3. $g(p) = p(1-p) = p - p^2$ est un polynôme du second degré, et $g(p) = \dfrac{1}{4} - \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2$. La variance est maximale pour $p = \dfrac{1}{2}$, et vaut alors $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 6

1. On répète 3 fois la même épreuve de Bernoulli (succès : atteindre la zone centrale, $p = 0{,}3$), de façon indépendante : schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}3$.
2. $(0\,;0\,;0)$, $(0\,;0\,;1)$, $(0\,;1\,;0)$, $(0\,;1\,;1)$, $(1\,;0\,;0)$, $(1\,;0\,;1)$, $(1\,;1\,;0)$, $(1\,;1\,;1)$: il y en a $2^3 = 8$, car chaque lancer a deux résultats (principe multiplicatif).
3. $P\big((1\,;1\,;1)\big) = 0{,}3^3 = 0{,}027$ et $P\big((0\,;0\,;0)\big) = 0{,}7^3 = 0{,}343$.
4. $P\big((1\,;0\,;1)\big) = 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}063$. Les issues $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$, qui comportent aussi deux succès et un échec, ont la même probabilité.
5. Exactement deux fois : $3 \times 0{,}063 = 0{,}189$. Au moins une fois : $1 - 0{,}343 = 0{,}657$.

Exercice 7

1. On répète 5 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli (succès : « la réponse est juste », $p = \frac{1}{4}$), et X compte les succès : X suit la loi $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{1}{4}\right)$.
2. $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1\,024}$; $P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64} = \frac{270}{1\,024} = \frac{135}{512}$.
3.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$0{,}237$	$0{,}396$	$0{,}264$	$0{,}088$	$0{,}015$	$0{,}001$

Une solution de Barreau

4. La valeur la plus probable est 1.
5. $P(X \geqslant 3) = \dfrac{90 + 15 + 1}{1\,024} = \dfrac{106}{1\,024} = \dfrac{53}{512} \approx 0{,}104$.

Exercice 8

1. **a.** Oui : $\mathcal{B}\left(10\,;\frac{1}{2}\right)$. **b.** Oui : les tirages avec remise sont indépendants et identiques, $\mathcal{B}(4\,;0{,}3)$. **c.** Non : sans remise, la composition de l'urne change, les tirages ne sont pas indépendants. **d.** Non : le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance, et X ne compte pas des succès. **e.** Non : X n'est pas un nombre de succès (il prend les valeurs de 3 à 18).
2. **a.** Avec S pour un succès : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$. Une telle issue est connue dès que l'on choisit les rangs des deux succès parmi les quatre : il y en a $\binom{4}{2} = 6$.
   b. Chacune a pour probabilité $p \times p \times (1-p) \times (1-p) = p^2(1-p)^2$ (épreuves indépendantes). Ces issues sont incompatibles : $P(X = 2) = 6\,p^2(1-p)^2$.
   c. $6 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2 = 6 \times 0{,}09 \times 0{,}49 = 0{,}2646$.

Exercice 9

1. On répète 50 fois la même épreuve de Bernoulli (succès : « le stylo est défectueux », $p = 0{,}02$) ; le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, les épreuves sont indépendantes ; X compte les succès.
2. $P(X = 0) = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364$; $P(X = 1) = 50 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{49} = 0{,}98^{49} \approx 0{,}372$.
3. $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}922$ (probabilité cumulée).
4. $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}078$.
5. $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 0) \approx 0{,}982 - 0{,}364 = 0{,}618$.

Exercice 10

1. X suit la loi $\mathcal{B}(40\,;0{,}35)$ (40 épreuves identiques et indépendantes, succès « le foyer a un chien »).
2. $P(X = 14) \approx 0{,}131$; $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}121$; $P(10 \leqslant X \leqslant 18) = P(X \leqslant 18) - P(X \leqslant 9) \approx 0{,}866$; $P(X > 18) = 1 - P(X \leqslant 18) \approx 0{,}070$.
3. **a.** $P(X \leqslant 18) - P(X \leqslant 9) = P(10 \leqslant X \leqslant 18)$.
   b. $P(X \geqslant 12) = 1 - P(X \leqslant 11)$: `1 - cumul(40, 0.35, 11)`, qui vaut environ $0{,}795$.

Exercice 11

Une solution de BarroTech

1. Le nombre X de colis endommagés suit la loi $\mathcal{B}(n\,;0{,}02)$. Le contraire de « au moins un colis endommagé » est « aucun » : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}98^n$.
2. $1 - 0{,}98^n > 0{,}5 \iff 0{,}98^n < 0{,}5 \iff n\ln(0{,}98) < \ln(0{,}5) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \approx 34{,}3$, en changeant le sens car $\ln(0{,}98) < 0$. Il faut au moins 35 colis. Vérification : $1 - 0{,}98^{34} \approx 0{,}497$ et $1 - 0{,}98^{35} \approx 0{,}507$.
3. Fournisseur A : $0{,}98^{20} \approx 0{,}668$. Fournisseur B : $0{,}96^{10} \approx 0{,}665$. Le fournisseur A est légèrement plus sûr, alors que ses lots comptent deux fois plus de colis.

Exercice 12

1. Le nombre X de parties gagnées suit la loi $\mathcal{B}(10,p)$: $P(X=1)=\binom{10}{1}p\,(1-p)^9=10\,p\,(1-p)^9$.
2. *On dérive un produit, avec* $(u^9)'=9u'u^8$. $f'(p)=10(1-p)^9+10p\times 9\times(-1)\times(1-p)^8=10(1-p)^8\big[(1-p)-9p\big]=10(1-p)^8(1-10p)$.
3. $(1-p)^8\geqslant 0$, nul seulement en $p=1$: $f'(p)$ a le signe de $1-10p$. Donc f est croissante sur $[0\,;0{,}1]$ et décroissante sur $[0{,}1\,;1]$. La probabilité est maximale pour $p=0{,}1$, et vaut $f(0{,}1)=10\times 0{,}1\times 0{,}9^9=0{,}9^9\approx 0{,}387$.
4. $f_n'(p)=n(1-p)^{n-1}-n(n-1)\,p\,(1-p)^{n-2}=n(1-p)^{n-2}\big[(1-p)-(n-1)p\big]=n(1-p)^{n-2}(1-np)$, du signe de $1-np$ sur $[0\,;1[$. La fonction f_n croît sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$: elle est maximale pour $p=\dfrac{1}{n}$.

Exercice 13

1. X suit la loi $\mathcal{B}\left(60\,;\frac{1}{6}\right)$.
2. *On partage le risque :* $0{,}025$ *de chaque côté.* $P(X\leqslant 4)\approx 0{,}020\leqslant 0{,}025$ et $P(X\leqslant 5)\approx 0{,}051>0{,}025$: $a=5$. $P(X\leqslant 15)\approx 0{,}966<0{,}975$ et $P(X\leqslant 16)\approx 0{,}984\geqslant 0{,}975$: $b=16$. L'intervalle $I=[5\,;16]$ convient.
3. $P(5\leqslant X\leqslant 16)=P(X\leqslant 16)-P(X\leqslant 4)\approx 0{,}963$.
4. $19\notin I$, et $P(X>16)=1-P(X\leqslant 16)\approx 0{,}016$: avec un dé équilibré, obtenir 17 fois le 6 ou plus est rare. Ce résultat peut faire douter que le dé soit équilibré.
5. `(5, 16)`.

Une solution de BarroTech

Exercice 14

1. X suit la loi $\mathcal{B}(54\,;0{,}92)$ (54 clients, présence avec la probabilité $0{,}92$, indépendamment).
2. Des clients restent sans place si $X>50$: $P(X>50)=1-P(X\leqslant 50)\approx 0{,}364$. Le risque est grand.
3. `seuil(54, 0.92, 0.05)` renvoie le plus petit k tel que $P(X>k)\leqslant 0{,}05$. Ici $P(X>52)\approx 0{,}063$ et $P(X>53)\approx 0{,}011$: la fonction renvoie `53`. Pour vendre 54 places avec un risque d'au plus $0{,}05$, il faudrait un car de 53 places.
4. On complète par `n = n + 1`. La boucle continue tant que vendre une place de plus garde un risque d'au plus $0{,}05$. Avec 51 places vendues, le risque est $P(X=51)=0{,}92^{51}\approx 0{,}014$; avec 52, il vaut environ $0{,}072>0{,}05$. La fonction renvoie `51` : l'agence peut vendre au plus 51 places.

Exercice 15

1. La bille passe un clou par rangée : 6 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « à droite » et de paramètre $0{,}5$. Le numéro de la case est le nombre de déplacements à droite, donc le nombre de succès : X suit la loi $\mathcal{B}\left(6\,;\frac{1}{2}\right)$.
2. $P(X=k)=\binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{\binom{6}{k}}{64}$: $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}$ pour $k=0,1,\ldots,6$ (ligne 6 du triangle de Pascal).
3. $P(X=3)=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}=0{,}3125$. $P(2\leqslant X\leqslant 4)=\frac{15+20+15}{64}=\frac{50}{64}=\frac{25}{32}\approx 0{,}781$.
4. Environ $500\times\frac{5}{16}\approx 156$ billes dans la case 3 (une exécution a d'ailleurs affiché 156). Le nombre exact change d'une exécution à l'autre, car chaque bille est simulée au hasard.

Exercice 16

1. $P(X\geqslant 5)=1-P(X\leqslant 4)\approx 0{,}150$.
2. La condition est `x >= 5` : la liste en compréhension garde les valeurs supérieures ou égales à 5, et `len` les compte.
3. $0{,}1512$ est proche de $0{,}150$ sans lui être égal : c'est une fréquence observée sur un échantillon, qui varie d'une exécution à l'autre autour de la probabilité.
4. `randint(1, 6)` renvoie un entier au hasard entre 1 et 6, chacun avec la probabilité $\frac{1}{6}$. La fonction renvoie 1 si cet entier vaut 6, c'est-à-dire avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et 0 sinon : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Une solution de BarroTech