# Représentations paramétriques et équations cartésiennes

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

*Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée. Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé. Dans les exercices sur le cube, $ABCDEFGH$ est un cube d'arête $1$ : $ABCD$ est la face du bas, et $E$, $F$, $G$, $H$ sont au-dessus de $A$, $B$, $C$, $D$.*

## Leçon 1 : représentation paramétrique d'une droite

### Exercice 1 : écrire et lire des représentations paramétriques

1. Donner une représentation paramétrique de la droite $d$ passant par $A(2\,;-1\,;0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(3\,;1\,;-2)$. Donner les coordonnées de ses points de paramètres $t=1$ et $t=-2$.
2. Soit $B(1\,;4\,;-2)$ et $C(3\,;0\,;1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite $(BC)$. Le point $K(5\,;-4\,;4)$ appartient-il à $(BC)$ ? Quelles valeurs du paramètre décrivent le segment $[BC]$ ? En déduire les coordonnées du milieu de $[BC]$.
3. On considère la droite $d'$ : $x=5-2t$, $y=3$, $z=-1+t$ ($t\in\mathbb{R}$). Donner un point et un vecteur directeur de $d'$. Les points $E(1\,;3\,;1)$, $F(3\,;3\,;1)$ et $G(1\,;2\,;1)$ appartiennent-ils à $d'$ ?
4. Les systèmes $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=3+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=5-4s \\ y=-2+2s \\ z=5-2s \end{cases}$ $(s\in\mathbb{R})$ représentent-ils la même droite ?

Une solution de BarroTech

### Exercice 2 : la montée d'un avion de tourisme

Après son décollage, un petit avion monte en ligne droite, à vitesse constante. Dans un repère orthonormé d'unité le kilomètre, dont le plan $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ représente le sol, sa position $t$ minutes après le passage au-dessus du point $O$ est le point $M(t)$ de coordonnées

$$x=2t,\qquad y=1{,}5t,\qquad z=0{,}3+0{,}2t,\qquad 0\leq t\leq 10.$$

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la trajectoire. À quelle altitude l'avion passe-t-il au-dessus de $O$ ?
2. Donner la position de l'avion au bout de $5$ minutes.
3. À quel instant l'avion atteint-il l'altitude de $1{,}5$ km ? Quelle est alors sa position ?
4. Un château d'eau est situé au point $C(8\,;6\,;0)$. L'avion passe-t-il à la verticale de $C$ ? Si oui, à quel instant et à quelle altitude ?
5. Quelle distance l'avion parcourt-il en une minute ? En déduire sa vitesse en kilomètres par heure, arrondie à l'unité.
6. Entre quelles valeurs de $t$ l'avion parcourt-il le segment $[PQ]$, avec $P(4\,;3\,;0{,}7)$ et $Q(16\,;12\,;1{,}9)$ ?

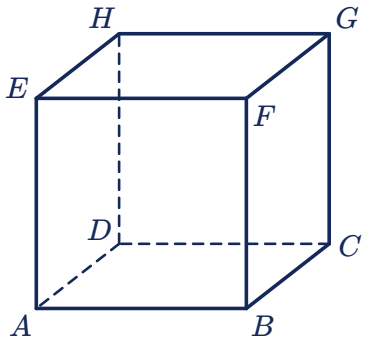
## Leçon 2 : équation cartésienne d'un plan

### Exercice 3 : trouver des équations de plans

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et normal à $\vec{n}\,(2\,;1\,;-1)$. Le point $R(0\,;0\,;3)$ appartient-il à $\mathcal{P}_1$ ?
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $B(0\,;4\,;-1)$ et normal à $\vec{\jmath}\,(0\,;1\,;0)$.
3. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_3$ passant par l'origine $O$ et normal à $\vec{n}'\,(3\,;-1\,;2)$.
4. Soit $C(1\,;0\,;3)$ et $D(3\,;2\,;-1)$. Déterminer une équation du plan médiateur de $[CD]$. Vérifier que le point $E(1\,;0\,;0)$ est à égale distance de $C$ et de $D$, puis qu'il appartient à ce plan.
5. *Démonstration.* On reprend la question 1. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque. Calculer $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ en fonction de $x$, $y$, $z$, et retrouver l'équation de $\mathcal{P}_1$. Pourquoi faut-il que le repère soit orthonormé ?

### Exercice 4 : des plans dans le cube

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



Le cube ABCDEFGH

1. Donner une équation de chacun des plans $(ABC)$, $(EFG)$, $(BCG)$ et $(ADH)$.
2. Calculer $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$. En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan $(BDE)$, puis une équation de ce plan.
3. Montrer que le plan $(CFH)$ a pour équation $x+y+z-2=0$. Que peut-on dire des plans $(BDE)$ et $(CFH)$ ?
4. Soit $\Omega$ le centre du cube, milieu de $[AG]$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{Q}$ passant par $\Omega$ et normal à $\overrightarrow{AG}$. Montrer que les milieux des arêtes $[BC]$ et $[DH]$ appartiennent à $\mathcal{Q}$, puis citer quatre autres arêtes du cube dont le milieu est dans $\mathcal{Q}$.

Une solution de BarroTech

## Leçon 3 : reconnaître un plan, plan défini par trois points

### Exercice 5 : lire une équation de plan

On considère le plan $\mathcal{P} : 3x-2y+z-6=0$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$.
2. Parmi les points $A(2\,;0\,;0)$, $B(1\,;-1\,;1)$, $C(0\,;0\,;6)$ et $D(1\,;2\,;4)$, lesquels appartiennent à $\mathcal{P}$ ?
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les trois axes du repère.
4. Le plan $\mathcal{P}' : -6x+4y-2z+1=0$ est-il parallèle à $\mathcal{P}$ ? Ces plans sont-ils confondus ?
5. Déterminer une équation du plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par $E(1\,;1\,;1)$.
6. Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ passant par $E$ et orthogonale à $\mathcal{P}$.
7. La droite $d : x=t,\ y=1+2t,\ z=3+t$ $(t\in\mathbb{R})$ est-elle parallèle à $\mathcal{P}$ ? Est-elle contenue dans $\mathcal{P}$ ?
8. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R} : x+y-z+4=0$ sont-ils parallèles ?

### Exercice 6 : un plan par trois points, une rampe d'accès

**Partie A.** Soit $A(1\,;2\,;0)$, $B(3\,;1\,;1)$, $C(0\,;4\,;2)$ et $\vec{n}\,(4\,;5\,;-3)$.

1. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.
2. Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan $(ABC)$, puis déterminer une équation de ce plan.
3. Les points $A$, $B$, $C$ et $D(2\,;2\,;1)$ sont-ils coplanaires ?

**Partie B.** Pour rendre l'entrée d'une salle de quartier accessible aux fauteuils roulants, on installe une rampe rectangulaire $RSTU$. Dans un repère orthonormé d'unité le mètre, d'axe $(O\,;\vec{k})$ vertical : $R(0\,;0\,;0)$, $S(0\,;1{,}5\,;0)$, $T(6\,;1{,}5\,;0{,}3)$ et $U(6\,;0\,;0{,}3)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{m}\,(1\,;0\,;-20)$ est normal au plan $(RSU)$, puis déterminer une équation de ce plan. Vérifier que $T$ appartient à ce plan.
2. Une personne se trouve sur la rampe, au point d'abscisse $4$ et d'ordonnée $0{,}75$. À quelle hauteur au-dessus du sol est-elle ?
3. La pente de la rampe est le rapport entre la hauteur gagnée et la distance horizontale parcourue. Calculer cette pente en pourcentage. On considère qu'une pente de $5\,\%$ au plus est confortable : est-ce le cas ?
4. Montrer que $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RU}$ sont orthogonaux, puis calculer l'aire de la rampe au centième de mètre carré près. Le revêtement antidérapant coûte $85$ euros le mètre carré : quel est son prix, au centime près ?

Une solution de BarroTech

## Leçon 4 : intersections

### Exercice 7 : droites et plans, deux droites

**Partie A.** On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$. Pour chacune des droites suivantes, étudier sa position par rapport à $\mathcal{P}$ et, s'il y a lieu, donner leur point d'intersection.

1. $d_1 : x = 2 + t,\ y = -1 + 3t,\ z = 1 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$ ;
2. $d_2 : x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 5\ (t \in \mathbb{R})$ ;
3. $d_3 : x = t,\ y = -4 + t,\ z = -t\ (t \in \mathbb{R})$.

**Partie B.** On considère la droite $\delta : x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 2t\ (t \in \mathbb{R})$. Étudier la position relative de $\delta$ et de chacune des droites suivantes, et donner leur point commun s'il existe.

1. $\delta_1 : x = s,\ y = 5 - 2s,\ z = 4 - s\ (s \in \mathbb{R})$ ;
2. $\delta_2 : x = 4 + s,\ y = s,\ z = 1 - s\ (s \in \mathbb{R})$ ;
3. $\delta_3 : x = 2 - 2s,\ y = 2s,\ z = 4 - 4s\ (s \in \mathbb{R})$.

### Exercice 8 : un forage géothermique

Pour chauffer une maison, on fore un puits rectiligne jusqu'à une couche de roche qui contient de l'eau chaude. On se place dans un repère orthonormé d'unité le mètre : l'origine $A$ est la tête du puits, le sol est le plan d'équation $z = 0$ et l'axe des cotes est vertical, orienté vers le haut. Le forage part de $A$ dans la direction du vecteur $\vec{u}\,(4\,;4\,;-7)$. La couche de roche est modélisée par le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 20z + 2560 = 0$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite du forage. Calculer $\|\vec{u}\|$.
2. Déterminer le point $I$ où le forage atteint la couche. À quelle profondeur se trouve-t-il ?
3. Calculer la longueur $AI$ du forage. Le forage coûte $60$ euros par mètre : quel est son prix ?
4. Un forage vertical partant de $A$ atteindrait la couche en quel point ? Quelle économie ferait-on ?
5. Un second forage part du point $B(100\,;0\,;0)$ dans la direction du vecteur $\vec{w}\,(-2\,;3\,;-5)$. Pour la sécurité, les deux forages ne doivent pas se couper. Est-ce le cas ?

---

## Leçon 5 : projeté orthogonal et distance

### Exercice 9 : projetés sur un plan, sur une droite

**Partie A.** On considère le plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z + 3 = 0$ et le point $M(2\,;-1\,;1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ passant par $M$ et orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H$ de $M$ sur $\mathcal{P}$.
3. En déduire la distance du point $M$ au plan $\mathcal{P}$.
4. Déterminer les coordonnées du point $M'$ symétrique de $M$ par rapport à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire tel que $H$ soit le milieu de $[MM']$.

Une solution de BarroTech

**Partie B.** La droite $d$ passe par $B(0\,;1\,;2)$ et elle est dirigée par $\vec{v}\,(2\,;-1\,;2)$. Soit $N(6\,;1\,;5)$.

1. Donner une représentation paramétrique de $d$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $K$ de $N$ sur $d$.
3. En déduire la distance du point $N$ à la droite $d$.
4. Retrouver la valeur du paramètre de $K$ avec la formule du chapitre 9, $t = \dfrac{\overrightarrow{BN} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$.

### Exercice 10 : la lampe et la table à dessin

Dans un atelier, le plateau d'une table à dessin est incliné. Dans un repère orthonormé d'unité le décimètre, d'axe $(O\,;\vec{k})$ vertical, le plateau est le rectangle $EFGK$ avec $E(0\,;0\,;8)$, $F(0\,;6\,;8)$, $G(8\,;6\,;12)$ et $K(8\,;0\,;12)$. Une lampe est accrochée au point $L(2\,;3\,;19)$.

1. Vérifier que $E$, $F$ et $G$ appartiennent au plan $\mathcal{P} : x - 2z + 16 = 0$. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H$ de $L$ sur $\mathcal{P}$. Le point $H$ est-il sur le plateau, sachant que le plateau est formé des points de $\mathcal{P}$ tels que $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq y \leq 6$ ?
3. Calculer la distance de la lampe au plateau, au centimètre près.
4. Le bord haut du plateau est le segment $[KG]$. Donner une représentation paramétrique de la droite $(KG)$, puis déterminer le point $H'$ de cette droite le plus proche de $L$ et la distance $LH'$, au centimètre près. Comparer avec la question 3.

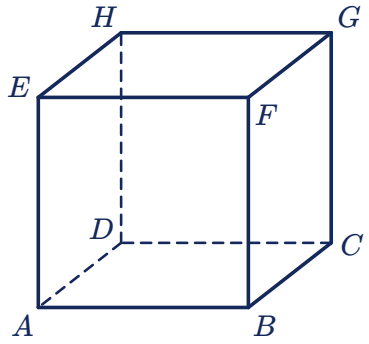
---

## Leçon 6 : systèmes linéaires en géométrie

### Exercice 11 : bases et coordonnées

**Partie A.** On considère les vecteurs $\vec{u}\,(1\,;1\,;0)$, $\vec{v}\,(0\,;1\,;1)$ et $\vec{w}\,(1\,;0\,;1)$.

1. Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}\,(5\,;1\,;2)$ dans cette base.
3. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}'\,(1\,;3\,;2)$ forment-ils une base ?



Le cube ABCDEFGH

**Partie B.** Dans le cube, on se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$, puis montrer qu'ils forment une base.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH})$.
3. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans cette même base.

### Exercice 12 : coplanarité et alignement

On considère les points $A(1\,;0\,;2)$, $B(3\,;1\,;1)$, $C(2\,;3\,;0)$, $D(4\,;4\,;-1)$, $E(1\,;1\,;1)$ et $F(7\,;3\,;-1)$.

1. Les points $A$, $B$ et $F$ sont-ils alignés ? Et les points $A$, $B$ et $C$ ?
2. En résolvant un système, montrer que $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$ ?
3. Les points $A$, $B$, $C$ et $E$ sont-ils coplanaires ?
4. Montrer que $\vec{n}\,(1\,;3\,;5)$ est normal au plan $(ABC)$ et en déduire une équation de ce plan. Retrouver les résultats des questions 2 et 3.
5. Déterminer le point d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$. Que représente-t-il pour le quadrilatère $ABDC$ ?