Chapitre 9 : Orthogonalité et distances dans l'espace

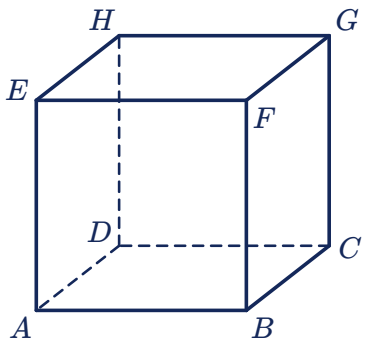
CD

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée. Dans les exercices sur le cube, $ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ est la face du bas, et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Leçon 1 : produit scalaire dans l'espace

Exercice 1 : produits scalaires dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2. Sans utiliser de coordonnées (projection, relation de Chasles ou angle), calculer :



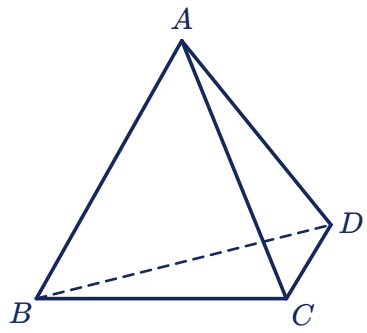
Le cube ABCDEFGH

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$;
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH}$;
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$;
5. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$ (on pourra remarquer que le triangle AFH est équilatéral) ;
6. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BD}$. Que peut-on dire des droites (EG) et (BD) ? Sont-elles perpendiculaires ?

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : calculer avec les propriétés

Partie A. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.



Le tétraèdre régulier ABCD

1. Calculer $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$.
3. Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u} + k\vec{v}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
4. Donner une mesure, au dixième de degré près, de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Partie B. $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 4 : ses six arêtes mesurent 4.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis AI^2. En déduire la longueur AI.
3. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Leçon 2 : base orthonormée et coordonnées

Exercice 3 : calculer avec des coordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\,(1\,;-2\,;2)$, $\vec{v}\,(4\,;1\,;-1)$ et $\vec{w}\,(m\,;2\,;1)$, où m est un réel.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux. Pour cette valeur de m, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?
4. Soit $A(2\,;-1\,;3)$ et $B(0\,;3\,;-1)$. Calculer la distance AB et les coordonnées du milieu de $[AB]$.
5. On pose $\vec{e}_1=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{e}_3=\vec{k}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux deux à deux ? Forment-ils une base orthonormée ? Sinon, proposer une base orthonormée formée de vecteurs colinéaires à $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Exercice 4 : un carton de déménagement

Partie A. Un carton de déménagement a la forme d'un pavé droit de dimensions 60 cm, 40 cm et 40 cm. On le place dans un repère orthonormé d'unité 1 cm : un coin du carton est à l'origine O, ses arêtes issues de O suivent les trois axes, et le coin opposé est $S(60\,;40\,;40)$.

1. Calculer la longueur OS de la diagonale du carton, au millimètre près.
2. Peut-on ranger dans ce carton une tringle à rideau rigide de 80 cm (on néglige son épaisseur) ?
3. Peut-on la poser à plat au fond du carton, sur une face de 60 cm sur 40 cm ?

Partie B. Dans un repère orthonormé, $A(1\,;2\,;0)$, $B(3\,;1\,;2)$ et $C(3\,;4\,;-1)$.

1. Calculer AB, AC et BC.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un carré.
4. Déterminer les coordonnées du centre de ce carré.

Leçon 3 : polarisation et angles

Exercice 5 : avec des longueurs seulement

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis $\|\vec{u}-\vec{v}\|$, puis l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. ABC est un triangle de l'espace tel que $AB=5$, $AC=4$ et $BC=6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
3. Démontrer que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$. Application : $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=3$ et $AC=6$; calculer BD.
4. Démontrer que si $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. Quelle propriété des losanges retrouve-t-on ?

Exercice 6 : des angles dans l'espace

Partie A. Dans un repère orthonormé, $A(2\,;1\,;0)$, $B(4\,;3\,;1)$ et $C(5\,;1\,;3)$.

1. Calculer AB, AC et BC.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Partie B : un panneau solaire. On utilise un repère orthonormé dont le vecteur $\vec{\imath}$ pointe vers l'est, $\vec{\jmath}$ vers le nord et $\vec{k}$ vers le haut. Un panneau solaire est fixé sur un toit ; le vecteur $\vec{n}\,(0\,;-3\,;4)$ est orthogonal au panneau et dirigé vers le ciel. À midi, la direction du panneau vers le soleil est celle du vecteur $\vec{s}_1\,(0\,;-1\,;2)$; à 10 heures, celle du vecteur $\vec{s}_2\,(2\,;-2\,;3)$.

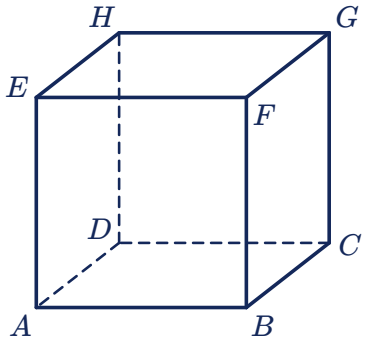
1. Calculer, au dixième de degré près, l'angle θ_1 entre $\vec{n}$ et $\vec{s}_1$, puis l'angle θ_2 entre $\vec{n}$ et $\vec{s}_2$.
2. On admet que la puissance reçue par le panneau est proportionnelle à $\cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{n}$ et la direction du soleil. Quel pourcentage de la puissance maximale le panneau reçoit-il à midi ? à 10 heures ? Arrondir au dixième.

Leçon 4 : droites et plans orthogonaux

Exercice 7 : orthogonalités dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Une solution de BarroTech

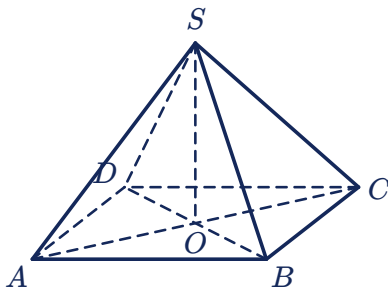


Le cube ABCDEFGH

1. Donner les coordonnées des points B, C, F et H.
2. Montrer que la droite (BH) est orthogonale aux droites (AC) et (AF).
3. En déduire que (BH) est orthogonale au plan (ACF), puis que (BH) et (CF) sont orthogonales.
4. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** Les droites (AB) et (GH) sont parallèles.
   - **b.** Les droites (AB) et (CG) sont perpendiculaires.
   - **c.** Deux droites orthogonales à la droite (AE) sont parallèles entre elles.
   - **d.** La droite (EG) est orthogonale au plan (BDH).

Exercice 8 : le toit d'un kiosque

Le toit d'un kiosque de jardin a la forme d'une pyramide $SABCD$: sa base $ABCD$ est un carré de centre O, et la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC). Cet exercice se fait sans coordonnées.



Le toit SABCD (O centre de ABCD)

1. Justifier que $(BD) \perp (AC)$ et que $(BD) \perp (SO)$.
2. En déduire que la droite (BD) est orthogonale au plan (SAC).
3. En déduire que les droites (SA) et (BD) sont orthogonales. Sont-elles perpendiculaires ?
4. Montrer de même que la droite (AC) est orthogonale au plan (SBD).

Leçon 5 : vecteur normal et plan médiateur

Exercice 9 : un plan défini par un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(1\,;-1\,;2)$ et normal au vecteur $\vec{n}\,(2\,;1\,;-2)$.

1. Les points $M(2\,;1\,;4)$, $N(0\,;0\,;0)$ et $R(3\,;-1\,;4)$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?
2. Déterminer le réel c tel que le point $Q(0\,;3\,;c)$ appartienne à $\mathcal{P}$.
3. Soit $B(3\,;0\,;0)$ et $C(7\,;2\,;-4)$. Montrer que la droite (BC) est orthogonale à $\mathcal{P}$.
4. Soit $D(1\,;1\,;1)$ et $E(3\,;1\,;3)$. Montrer que la droite (DE) est parallèle à $\mathcal{P}$. Est-elle contenue dans $\mathcal{P}$?
5. Soit $\mathcal{P}'$ le plan passant par B et normal à $\vec{n}'\,(-4\,;-2\,;4)$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils parallèles ? confondus ?

Une solution de BrosTech

Exercice 10 : plans médiateurs

Partie A. Dans un repère orthonormé, $A(2\,;-1\,;1)$ et $B(4\,;3\,;-1)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Les points $M(4\,;1\,;1)$ et $N(1\,;2\,;1)$ appartiennent-ils au plan médiateur de $[AB]$? Vérifier en calculant MA, MB, NA et NB.
3. Déterminer le point de l'axe des cotes, de coordonnées $(0\,;0\,;z)$, situé à égale distance de A et de B.
4. Déterminer de même le point de l'axe des abscisses situé à égale distance de A et de B.

Partie B. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

1. Montrer que les points B, C, E et H sont à égale distance de A et de F.
2. En déduire le plan médiateur de $[AF]$, puis que les droites (AF) et (CE) sont orthogonales.

Leçon 6 : projeté orthogonal et distances

Exercice 11 : la tyrolienne

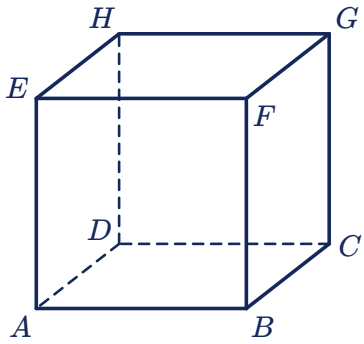
Dans un parc d'accrobranche, le câble d'une tyrolienne est tendu en ligne droite entre deux plateformes, du point A au point B. Dans un repère orthonormé d'unité le mètre, $A(0\,;0\,;10)$ et $B(24\,;12\,;2)$.

1. Calculer la longueur AB du câble.
2. Une branche se trouve au point $M(13\,;6\,;9)$.
   - **a.** Calculer $t = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{AB^2}$, puis les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur la droite (AB). Le point H est-il sur le câble $[AB]$?
   - **b.** Calculer la distance de la branche au câble, au centimètre près. Pourquoi est-ce la plus courte distance entre M et le câble ?
3. Par sécurité, aucune branche ne doit se trouver à moins de 2 m du câble. Une autre branche est au point $N(6{,}5\,;3\,;9{,}5)$. Faut-il la couper ?

Exercice 12 : la diagonale du cube coupée en trois

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On note $K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $L\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$, deux points de la diagonale $[AG]$.

Une solution de BarroTech



Le cube ABCDEFGH

1. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH).
2. Montrer que $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$. Que peut-on en déduire pour le point L ?
3. En déduire que L est le projeté orthogonal de A sur le plan (CFH). Calculer la distance du point A au plan (CFH), puis celle du point G à ce plan.
4. On a vu dans le cours que K est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE). Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles, et qu'ils partagent la diagonale $[AG]$ en trois segments de même longueur.

Leçon 7 : longueurs, angles, aires et volumes

Exercice 13 : une voile d'ombrage

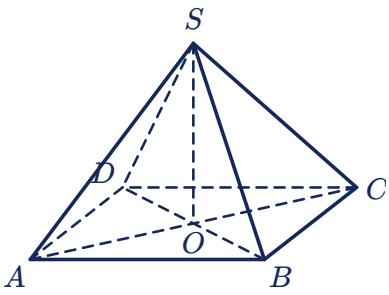
Pour ombrager une terrasse, on tend une voile triangulaire entre trois points d'attache. Dans un repère orthonormé d'unité le mètre, d'origine O au sol, les points d'attache sont $A(0\,;0\,;3)$, $B(4\,;0\,;2)$ et $C(0\,;4\,;2)$.

1. Calculer AB, AC et BC, puis la longueur de l'ourlet qui fait le tour de la voile, au centimètre près.
2. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
3. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que I est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). En déduire l'aire de la voile, au centième de mètre carré près.
4. Le tissu coûte 12 euros le mètre carré. Quel est le prix du tissu de la voile, au centime près ?
5. **a.** Le triangle OAC est dans le plan $(O\,;\vec{\jmath},\vec{k})$. Calculer son aire. Justifier que le projeté orthogonal de B sur ce plan est $B'(0\,;0\,;2)$, puis calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
   - **b.** En déduire la distance du point O au plan de la voile, au centimètre près.

Exercice 14 : le toit du kiosque, en mesures

On reprend le toit de l'exercice 8. La base $ABCD$ est un carré de 4 m de côté, de centre O, et la hauteur du toit est $SO = 3$ m. Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité le mètre : $A(2\,;-2\,;0)$, $B(2\,;2\,;0)$, $C(-2\,;2\,;0)$, $D(-2\,;-2\,;0)$ et $S(0\,;0\,;3)$.

Une solution de BarroTech



Le toit SABCD (O centre de ABCD)

1. Calculer la longueur SA d'une arête du toit, au centimètre près.
2. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ au dixième de degré près.
3. Soit M le milieu de $[AB]$. Montrer que $(SM) \perp (AB)$. En déduire l'aire de la face SAB, puis l'aire totale du toit (quatre faces). La couverture coûte 35 euros le mètre carré : quel est son prix, au centime près ?
4. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
5. En calculant de deux façons le volume du tétraèdre $OSAB$, déterminer la distance du centre O au plan (SAB), au centimètre près.