# Chapitre 9 : Orthogonalité et distances dans l'espace

DANS L'ESPACE

*Les rappels de méthode sont en italique. Dans le cube, on utilise sans le redire que les faces sont des carrés : deux arêtes issues d'un même sommet sont perpendiculaires.*

## Exercice 1

1. *Projection.* Dans la face $ABCD$, le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$ est $B$ : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 4$.
2. Les arêtes $[AB]$ et $[AE]$ sont perpendiculaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.
3. $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH} = -AB^2 = -4$.
4. *Chasles, puis bilinéarité.* $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 4 + 0 + 0 = 4$, car $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
5. $AF$, $AH$ et $FH$ sont des diagonales de faces : elles mesurent $2\sqrt{2}$, et le triangle $AFH$ est équilatéral. *Angle.* $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos 60^\circ = 8 \times \dfrac{1}{2} = 4$.
6. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, et les diagonales du carré $ABCD$ sont perpendiculaires : $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Les droites $(EG)$ et $(BD)$ sont **orthogonales**. Elles ne sont pas perpendiculaires : $(EG)$ est dans le plan de la face du haut, $(BD)$ dans celui de la face du bas, et ces plans sont parallèles et distincts, donc les deux droites n'ont aucun point commun.

Une solution de BarroTech

## Exercice 2

**Partie A.** *On développe par bilinéarité, avec $\vec{u}\cdot\vec{u}=9$, $\vec{v}\cdot\vec{v}=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=-1$.*

1. $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+2\,\vec{v}\cdot\vec{u}-2\,\vec{v}\cdot\vec{v} = 9+1-2-8 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}+2\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont **orthogonaux**.
2. $(2\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}-\|\vec{v}\|^2 = -2-4 = -6$.
3. $(\vec{u}+k\vec{v})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}+k\|\vec{v}\|^2 = -1+4k$. Ce produit est nul pour $k=\dfrac{1}{4}$.
4. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{-1}{6}$, donc $\theta \approx 99{,}6^\circ$.

**Partie B.**

1. Les faces sont des triangles équilatéraux de côté $4$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times4\times\cos 60^\circ = 8$, et de même $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8$.
2. $I$ est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Alors $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}(16+8) = 12$, et
$$AI^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2\right) = \frac{1}{4}(16+16+16) = 12, \quad \text{donc } AI=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$
3. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8-8 = 0$. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont orthogonales. Elles ne sont pas perpendiculaires : $A$, $B$, $C$, $D$ ne sont pas coplanaires, donc ces droites ne sont pas coplanaires et ne se coupent pas.

## Exercice 3

*Le repère est orthonormé : on peut utiliser les formules en coordonnées.*

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4-2-2 = 0$ : **oui**, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. $\vec{u}\cdot\vec{w} = m-4+2 = m-2$, nul pour $m=2$. Alors $\vec{w}\,(2\,;2\,;1)$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 8+2-1 = 9\neq 0$ : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.
4. $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;4\,;-4)$, donc $AB=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$. Le milieu de $[AB]$ est le point $(1\,;1\,;1)$.
5. $\vec{e}_1\,(1\,;1\,;0)$, $\vec{e}_2\,(1\,;-1\,;0)$, $\vec{e}_3\,(0\,;0\,;1)$ : $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 1-1=0$, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=0$, $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0$. Ils sont orthogonaux deux à deux, mais $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}\neq 1$ : la base n'est **pas orthonormée**. La base $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ est orthonormée.

## Exercice 4

**Partie A.**

1. $OS = \sqrt{60^2 + 40^2 + 40^2} = \sqrt{6800} = 20\sqrt{17} \approx 82{,}5$ cm.
2. $80 < 82{,}5$ : **oui**, la tringle tient dans le carton, en la plaçant le long de la diagonale $[OS]$.
3. La diagonale d'une face de $60$ cm sur $40$ cm mesure $\sqrt{3600 + 1600} = \sqrt{5200} = 20\sqrt{13} \approx 72{,}1$ cm $< 80$ cm : **non**, la tringle ne tient pas à plat.

**Partie B.**

1. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1\,;2)$, $\overrightarrow{AC}\,(2\,;2\,;-1)$, $\overrightarrow{BC}\,(0\,;3\,;-3)$, donc $AB = \sqrt{9} = 3$, $AC = \sqrt{9} = 3$ et $BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 2 - 2 = 0$ : le triangle $ABC$ est **rectangle en** $A$, et **isocèle** car $AB = AC$.
3. $ABDC$ est un carré si $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ (le triangle $ABC$ étant déjà rectangle isocèle en $A$). Donc $D = B + \overrightarrow{AC}$ : $D(5\,;3\,;1)$.
4. Le centre est le milieu de la diagonale $[BC]$ (ou de $[AD]$) : $\left(3\,;\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

## Exercice 5

1. *Polarisation.* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(49 - 9 - 25\right) = \dfrac{15}{2}$. Puis $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 9 - 2 \times \dfrac{15}{2} + 25 = 19$, donc $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{19}$. Enfin $\cos\theta = \dfrac{15/2}{3 \times 5} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = 60^\circ$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(25 + 16 - 36\right) = \dfrac{5}{2}$. Donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{5/2}{5 \times 4} = \dfrac{1}{8}$ et $\widehat{BAC} \approx 82{,}8^\circ$.
3. En additionnant les développements de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et de $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$, les termes $2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ s'éliminent : il reste $2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$. *Application* : avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on a $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{DB}$. Donc $36 + BD^2 = 2\,(16 + 9) = 50$, soit $BD^2 = 14$ et $BD = \sqrt{14}$.
4. $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$ si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Dans un losange $ABCD$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ ont la même norme ; $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{DB}$ : **les diagonales d'un losange sont perpendiculaires**.

Une solution de Barrouf

## Exercice 6

**Partie A.**

1. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;2\,;1)$, $\overrightarrow{AC}\,(3\,;0\,;3)$, $\overrightarrow{BC}\,(1\,;-2\,;2)$ : $AB=3$, $AC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $BC=3$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6+0+3=9$, donc $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{9}{3\times 3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAC}=45^\circ$.
3. $\overrightarrow{BA}\,(-2\,;-2\,;-1)$ et $\overrightarrow{BC}\,(1\,;-2\,;2)$ : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-2+4-2=0$. Le triangle $ABC$ est **rectangle isocèle en** $B$ ($BA=BC=3$) ; ses angles mesurent $90^\circ$, $45^\circ$ et $45^\circ$.

**Partie B.**

1. $\|\vec{n}\|=\sqrt{0+9+16}=5$. À midi : $\vec{n}\cdot\vec{s}_1=0+3+8=11$ et $\|\vec{s}_1\|=\sqrt{5}$, donc $\cos\theta_1=\dfrac{11}{5\sqrt{5}}\approx 0{,}984$ et $\theta_1\approx 10{,}3^\circ$. À 10 heures : $\vec{n}\cdot\vec{s}_2=0+6+12=18$ et $\|\vec{s}_2\|=\sqrt{17}$, donc $\cos\theta_2=\dfrac{18}{5\sqrt{17}}\approx 0{,}873$ et $\theta_2\approx 29{,}2^\circ$.
2. La puissance est maximale quand $\theta=0$ ($\cos\theta=1$). Le panneau reçoit environ $98{,}4\,\%$ de la puissance maximale à midi, et $87{,}3\,\%$ à 10 heures.

## Exercice 7

1. $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $F(1\,;0\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$.
2. $\overrightarrow{BH}\,(-1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{AC}\,(1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{AF}\,(1\,;0\,;1)$ : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1+0=0$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AF}=-1+0+1=0$.
3. $(AC)$ et $(AF)$ sont deux droites sécantes (en $A$) du plan $(ACF)$ : d'après le théorème du cours, $(BH)$ **est orthogonale au plan** $(ACF)$. Elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à $(CF)$. Vérification : $\overrightarrow{CF}\,(0\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CF}=0-1+1=0$.
4. **a. Vrai** : $\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{AB}$, les vecteurs directeurs sont colinéaires.
   - **b. Faux** : elles sont orthogonales ($\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}=0$) mais ne se coupent pas.
   - **c. Faux** : $(AB)$ et $(AD)$ sont orthogonales à $(AE)$, mais elles ne sont pas parallèles.
   - **d. Vrai** : $\overrightarrow{EG}\,(1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{BH}\,(-1\,;1\,;1)$ ; $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ et $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BH}=-1+1+0=0$, avec $(BD)$ et $(BH)$ sécantes en $B$.

## Exercice 8

1. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : $(BD) \perp (AC)$. La droite $(SO)$ est orthogonale au plan $(ABC)$, donc à toutes les droites de ce plan, en particulier à $(BD)$.
2. $(AC)$ et $(SO)$ sont deux droites sécantes (en $O$) du plan $(SAC)$, et $(BD)$ est orthogonale à chacune : $(BD)$ **est orthogonale au plan** $(SAC)$.
3. La droite $(SA)$ est contenue dans le plan $(SAC)$, donc $(BD) \perp (SA)$ : elles sont **orthogonales**. Elles ne sont **pas perpendiculaires** : $(SA)$ ne coupe le plan de la base qu'au point $A$, et $A$ n'est pas sur $(BD)$, donc $(SA)$ et $(BD)$ n'ont aucun point commun.
4. De même, $(AC) \perp (BD)$ (diagonales du carré) et $(AC) \perp (SO)$ (car $(SO)$ est orthogonale au plan de la base). $(BD)$ et $(SO)$ sont sécantes en $O$ dans le plan $(SBD)$ : $(AC)$ **est orthogonale au plan** $(SBD)$.

## Exercice 9

*Un point $M$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.*

1. $\overrightarrow{AM}\,(1\,;2\,;2)$ : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2 + 2 - 4 = 0$, donc $M \in \mathcal{P}$. $\overrightarrow{AN}\,(-1\,;1\,;-2)$ : $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} = -2 + 1 + 4 = 3 \neq 0$, donc $N \notin \mathcal{P}$. $\overrightarrow{AR}\,(2\,;0\,;2)$ : $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0$, donc $R \in \mathcal{P}$.
2. $\overrightarrow{AQ}\,(-1\,;4\,;c-2)$ : $\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} = -2 + 4 - 2(c-2) = 6 - 2c$, nul pour $c = 3$.
3. $\overrightarrow{BC}\,(4\,;2\,;-4) = 2\vec{n}$ : le vecteur directeur de $(BC)$ est colinéaire à $\vec{n}$, donc $(BC)$ **est orthogonale à** $\mathcal{P}$.
4. $\overrightarrow{DE}\,(2\,;0\,;2)$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0$ : la droite $(DE)$ est **parallèle à** $\mathcal{P}$. De plus $\overrightarrow{AD}\,(0\,;2\,;-1)$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0 + 2 + 2 = 4 \neq 0$ : $D \notin \mathcal{P}$, donc $(DE)$ n'est **pas contenue** dans $\mathcal{P}$ (elle est strictement parallèle).
5. $\vec{n'} = -2\vec{n}$ : les vecteurs normaux sont colinéaires, donc $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{P}'$ **sont parallèles**. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;1\,;-2)$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 4 + 1 + 4 = 9 \neq 0$ : $B \in \mathcal{P}'$ mais $B \notin \mathcal{P}$, donc les plans ne sont **pas confondus**.

Une solution de Barrolech

## Exercice 10

**Partie A.** *Un point $M$ est dans le plan médiateur de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.*

1. $I(3\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2\,;4\,;-2)$.
2. $\overrightarrow{IM}\,(1\,;0\,;1)$ : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=2+0-2=0$, donc $M$ **est dans le plan médiateur**. Vérification : $MA^2=4+4+0=8$ et $MB^2=0+4+4=8$, donc $MA=MB=2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{IN}\,(-2\,;1\,;1)$ : $\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{AB}=-4+4-2=-2\neq 0$, donc $N$ **n'y est pas**. Vérification : $NA=\sqrt{10}$ et $NB=\sqrt{14}$.
3. Pour $P(0\,;0\,;z)$ : $\overrightarrow{IP}\,(-3\,;-1\,;z)$ et $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{AB}=-6-4-2z=-10-2z$, nul pour $z=-5$. Le point cherché est $(0\,;0\,;-5)$, à la distance $\sqrt{41}$ de $A$ et de $B$.
4. Pour $P(x\,;0\,;0)$ : $\overrightarrow{IP}\,(x-3\,;-1\,;0)$ et $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{AB}=2x-6-4=2x-10$, nul pour $x=5$. Le point cherché est $(5\,;0\,;0)$, à la distance $\sqrt{11}$ de $A$ et de $B$.

**Partie B.**

1. $BA=BF=1$ (arêtes) ; $EA=EF=1$ (arêtes) ; $CA=CF=\sqrt{2}$ et $HA=HF=\sqrt{2}$ (diagonales de faces). Les quatre points sont à égale distance de $A$ et de $F$.
2. $B$, $C$, $E$ ne sont pas alignés : le plan médiateur de $[AF]$ est le plan $(BCE)$ (il contient aussi $H$ : c'est le rectangle $BCHE$). Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal à ce plan, donc la droite $(AF)$ est orthogonale à toutes ses droites, en particulier à $(CE)$.

## Exercice 11

Une solution de BarroTech

1. $\overrightarrow{AB}\,(24\,;12\,;-8)$, donc $AB=\sqrt{576+144+64}=\sqrt{784}=28$ m.
2. **a.** $\overrightarrow{AM}\,(13\,;6\,;-1)$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=312+72+8=392$, donc $t=\dfrac{392}{784}=\dfrac{1}{2}$. Comme $\overrightarrow{AH}=t\,\overrightarrow{AB}$, $H$ est le milieu de $[AB]$ : $H(12\,;6\,;6)$. Comme $0\leq t\leq 1$, $H$ est bien sur le câble.
   - **b.** $\overrightarrow{MH}\,(-1\,;0\,;-3)$ et $MH=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}\approx 3{,}16$ m. *Vérification* : $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=-24+0+24=0$. Le projeté orthogonal est le point de la droite le plus proche de $M$ (théorème du cours, par Pythagore) ; comme il est sur le câble, c'est aussi le point du câble le plus proche.
3. $\overrightarrow{AN}\,(6{,}5\,;3\,;-0{,}5)$ et $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=156+36+4=196$, donc $t=\dfrac{196}{784}=\dfrac{1}{4}$ et le projeté est $H'(6\,;3\,;8)$, sur le câble. Alors $\overrightarrow{NH'}\,(-0{,}5\,;0\,;-1{,}5)$ et $NH'=\sqrt{0{,}25+2{,}25}=\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}58$ m. C'est moins de $2$ m : **il faut couper cette branche**.

## Exercice 12

1. $\overrightarrow{AG}\,(1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{CF}\,(0\,;-1\,;1)$, $\overrightarrow{CH}\,(-1\,;0\,;1)$ : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CF}=0-1+1=0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}=-1+0+1=0$. Les droites $(CF)$ et $(CH)$ sont sécantes en $C$ : $(AG)$ **est orthogonale au plan** $(CFH)$.
2. $\overrightarrow{CL}\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ et $\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}=\left(0-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}+0\,;\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$. L'égalité est vraie : $L$ **appartient au plan** $(CFH)$.
3. $L$ est dans le plan $(CFH)$, et la droite $(AL)$, qui est la droite $(AG)$, est orthogonale à ce plan : $L$ **est le projeté orthogonal de** $A$ (et aussi de $G$) sur $(CFH)$. Donc $d\,(A,(CFH))=AL=\frac{2}{3}AG=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}15$ et $d\,(G,(CFH))=GL=\frac{1}{3}AG=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58$.
4. Les plans $(BDE)$ et $(CFH)$ ont le même vecteur normal $\overrightarrow{AG}$ : ils sont **parallèles**. Ils coupent la diagonale en $K$ et $L$, avec $AK=KL=LG=\frac{\sqrt{3}}{3}$ : la diagonale est partagée en trois segments de même longueur.

## Exercice 13

1. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;0\,;-1)$, $\overrightarrow{AC}\,(0\,;4\,;-1)$, $\overrightarrow{BC}\,(-4\,;4\,;0)$ : $AB=AC=\sqrt{17}\approx 4{,}12$ m et $BC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ m. L'ourlet mesure $2\sqrt{17}+4\sqrt{2}\approx 13{,}90$ m.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+0+1=1$, donc $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{17}$ et $\widehat{BAC}\approx 86{,}6^\circ$.
3. $I(2\,;2\,;2)$ et $\overrightarrow{AI}\,(2\,;2\,;-1)$ : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-8+8+0=0$. $I$ est sur $(BC)$ et $(AI)\perp(BC)$ : $I$ **est le projeté orthogonal de** $A$ **sur** $(BC)$, et $[AI]$ est une hauteur, de longueur $AI=\sqrt{4+4+1}=3$. L'aire de la voile vaut $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 3=6\sqrt{2}\approx 8{,}49$ m².
4. $6\sqrt{2}\times 12=72\sqrt{2}\approx 101{,}82$ euros.
5. **a.** Dans le plan $(O\,;\vec{\jmath},\vec{k})$, la base $[OA]$ mesure 3, et la hauteur issue de $C$ vaut 4 (le projeté de $C$ sur $(OA)$ est le point $(0\,;0\,;2)$). L'aire de $OAC$ vaut $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$. Le point $B'(0\,;0\,;2)$ est dans ce plan, et $\overrightarrow{BB'}\,(-4\,;0\,;0)$ est orthogonal à $\vec{\jmath}$ et à $\vec{k}$ : $B'$ est le projeté orthogonal de $B$, et la hauteur vaut $BB'=4$. Le volume du tétraèdre est $V=\frac{1}{3}\times 6\times 4=8$ m³.
   - **b.** Avec la base $ABC$ : $V=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{2}\times d$, donc $d=\frac{3\times 8}{6\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$ m.

## Exercice 14

1. $\overrightarrow{SA}\,(2\,;-2\,;-3)$, donc $SA=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}\approx 4{,}12$ m.
2. $\overrightarrow{SB}\,(2\,;2\,;-3)$ et $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=4-4+9=9$, donc $\cos\widehat{ASB}=\dfrac{9}{17}$ et $\widehat{ASB}\approx 58{,}0^\circ$.
3. $M(2\,;0\,;0)$, $\overrightarrow{SM}\,(2\,;0\,;-3)$ et $\overrightarrow{AB}\,(0\,;4\,;0)$ : $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, donc $(SM)\perp(AB)$ et $[SM]$ est la hauteur de la face $SAB$ issue de $S$. Avec $SM=\sqrt{13}$ et $AB=4$, l'aire de $SAB$ vaut $\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{13}=2\sqrt{13}\approx 7{,}21$ m². Le toit a quatre faces identiques : $8\sqrt{13}\approx 28{,}84$ m². Prix, calculé avec la valeur exacte : $35\times 8\sqrt{13}=280\sqrt{13}\approx 1\,009{,}55$ euros.
4. $V=\dfrac{1}{3}\times 4^2\times 3=16$ m³.
5. Base $OAB$ : c'est un triangle de base $AB=4$ et de hauteur $2$ (distance de $O$ à la droite $(AB)$), d'aire $4$ ; la hauteur correspondante est $SO=3$, car $(SO)$ est orthogonale au plan de la base. Donc $V_{OSAB}=\dfrac{1}{3}\times 4\times 3=4$ (c'est bien le quart de $16$). Avec la base $SAB$ : $4=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{13}\times d$, donc $d=\dfrac{12}{2\sqrt{13}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}\approx 1{,}66$ m.

Une solution de BarroTech