Fonction logarithme népérien

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : premières valeurs, premières équations

1. Calculer sans calculatrice :
   - **a.** $\ln\left(\mathrm{e}^{4}\right)$
   - **b.** $\mathrm{e}^{\ln 6}$
   - **c.** $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}\right)$
   - **d.** $\mathrm{e}^{-\ln 2}$
   - **e.** $\ln 1 + \ln \mathrm{e}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$; donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
   - **a.** $\mathrm{e}^{x} = 10$
   - **b.** $\mathrm{e}^{x} = -4$
   - **c.** $\ln x = 3$
   - **d.** $\ln x = -2$
   - **e.** $\mathrm{e}^{x+1} = 3$
3. Pour quels réels x les expressions $\ln(x-4)$ et $\ln(5-2x)$ existent-elles ?

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : une vidéo qui circule

Une association met en ligne une vidéo de présentation de sa fête de quartier. Le nombre de vues, t jours après la mise en ligne, est modélisé par

$$V(t) = 300\,\mathrm{e}^{0{,}5t}, \qquad t \geq 0.$$

1. Calculer $V(0)$ et interpréter.
2. Résoudre l'équation $V(t) = 1200$. Au bout de combien de jours et d'heures la vidéo atteint-elle 1200 vues ?
3. Au cours de quel jour la vidéo atteint-elle $30\,000$ vues ?
4. Expliquer pourquoi l'équation $V(t) = 200$ n'a pas de solution sur $[0\,;+\infty[$.
5. Ce modèle peut-il rester valable pendant plusieurs mois ? Justifier.

Leçon 2 : propriétés algébriques

Exercice 3 : transformer des écritures

1. Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
   - **a.** $\ln 50$
   - **b.** $\ln 0{,}08$
   - **c.** $\ln\left(\sqrt{40}\right)$
   - **d.** $\ln\left(\dfrac{1}{125}\right)$
   - **e.** $\ln 1000$
2. Simplifier :
   - **a.** $A = \ln 12 + \ln 3 - 2\ln 6$
   - **b.** $B = \ln\left(\mathrm{e}^5\right) - \ln\left(\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$
   - **c.** $C = \ln(2\mathrm{e}) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)$
   - **d.** $D = 2\ln 3 - \ln 18 + \ln 6$
3. Vérifier que $3 - 2\sqrt{2} > 0$, puis montrer que $\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 0$.

Exercice 4 : avec une variable

Une solution de BarroTech

1. Simplifier, pour tout réel $x > 0$:
   - **a.** $\ln\left(x^3\right) - \ln x$
   - **b.** $\ln(\mathrm{e}\,x) - \ln x$
   - **c.** $\ln\left(x^2 + 2x\right) - \ln(x+2)$
2. Simplifier, pour tout réel x : $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - 2\ln\left(\mathrm{e}^x\right)$.
3. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
   - **b.** Pour tout réel $x \neq 0$, $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$.
   - **c.** Pour tout réel $a > 0$, $\ln\left(a^2\right) = 2\ln a$.
   - **d.** $\ln 2 \times \ln 3 = \ln 6$.
4. Montrer que, pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^x\right) - x$.

Leçon 3 : équations et inéquations

Exercice 5 : équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant d'abord l'ensemble où l'équation a un sens.

1. $\ln(x+2) = \ln(3x-4)$
2. $\ln x + \ln(x+4) = \ln 5$
3. $\mathrm{e}^{3x-2} = 5$ (valeur exacte, puis valeur approchée au centième)
4. $\ln(2x-1) = -1$
5. $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^{x}$)
6. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ (on pourra poser $X = \ln x$)

Exercice 6 : inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln x \geq 2$
2. $\ln(2x-1) < 0$
3. $\mathrm{e}^{x} > 4$
4. $\mathrm{e}^{-2x+1} \leq 3$
5. $\ln(x+1) \leq \ln(2x-3)$
6. Étudier le signe de $\ln(x-2)$ selon les valeurs de x.

Une création de BarroTech

Leçon 4 : dérivée et variations

Exercice 7 : dériver

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 3\ln x - x^2$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f_2(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f_3(x) = (\ln x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f_4(x) = \ln(3x+2)$ sur $\left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$
5. $f_5(x) = \ln\left(x^2+4\right)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)$ sur $\mathbb{R}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ sur $]1\,;+\infty[$
8. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f_2 au point d'abscisse e.

Exercice 8 : la croissance d'un chêne

Un jeune chêne est planté dans un parc. Sa hauteur, en mètres, t années après la plantation, est modélisée par

$$h(t) = 2 + 3\ln(t+1), \qquad 0 \leq t \leq 50.$$

1. Quelle est la hauteur du chêne à la plantation ?
2. Calculer $h'(t)$ et en déduire le sens de variation de h.
3. Calculer $h'(0)$ et $h'(9)$. Interpréter : le chêne pousse-t-il de plus en plus vite ?
4. Au bout de combien d'années le chêne atteint-il 10 mètres ? Arrondir au dixième.
5. Quelle hauteur le modèle prévoit-il au bout de 50 ans ? Arrondir au centimètre.

Leçon 5 : limites et courbe

Exercice 9 : limites

Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle indiqué. Donner, s'il y en a, les asymptotes à la courbe.

1. $f(x) = 2 - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $g(x) = \ln(x-3)$ sur $]3\,;+\infty[$
3. $k(x) = (\ln x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $m(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ sur $]1\,;+\infty[$
5. $r(x) = \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$

Une solution de BarroTech

Exercice 10 : deux courbes symétriques

Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction $\ln$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse e. Montrer que T passe par l'origine.
2. Déterminer une équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Montrer que T' passe aussi par l'origine.
3. Le point $A(2\,;\ln 2)$ est sur Γ. Donner les coordonnées de son symétrique B par rapport à la droite $y = x$, et vérifier que B est sur $\mathcal{C}$.
4. Expliquer, avec la symétrie par rapport à la droite $y = x$, pourquoi les droites T et T' se correspondent.

Leçon 6 : croissances comparées

Exercice 11 : limites et croissances comparées

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x + x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x - x)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}$ (on pourra écrire $\dfrac{\ln x}{x+1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x+1}$)
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)\ln x$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3\ln x\right)$

Exercice 12 : la fonction $x \mapsto x \ln x$

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$.
4. En déduire que $x\ln x \geq -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pour tout $x > 0$.
5. On admet (exemple 26 du cours) que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ admet sur $]0\,;+\infty[$ un maximum, atteint seulement en e. Comparer $g(\pi)$ et $g(\mathrm{e})$, puis en déduire que $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$.

Une solution de Barrolech

Leçon 7 : résoudre des problèmes

Exercice 13 : trois seuils

Dans chaque question, poser l'inéquation, la résoudre avec le logarithme, puis vérifier le résultat à la calculatrice.

1. On suppose que le prix d'une baguette augmente de $2\,\%$ par an. Au bout de combien d'années aura-t-il au moins doublé ?
2. Dans une eau de mer très claire, chaque mètre de profondeur absorbe $8\,\%$ de la lumière qui lui arrive. À partir de quelle profondeur, en mètres entiers, reste-t-il moins de $1\,\%$ de la lumière de la surface ?
3. Une feuille de papier a une épaisseur de $0{,}1$ mm. À chaque pliage en deux, l'épaisseur double. Combien de pliages faudrait-il, en théorie, pour que l'épaisseur dépasse 1 km ?

Exercice 14 : la pression en montagne

La pression de l'air, en hectopascals (hPa), à l'altitude h mètres, est modélisée par

$$P(h) = 1013\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,125\,h}, \qquad h \geq 0.$$

1. Quelle est la pression au niveau de la mer ?
2. Calculer la pression au sommet d'une montagne de 4800 m. Arrondir à l'unité.
3. À partir de quelle altitude la pression est-elle inférieure à 700 hPa ? Arrondir au mètre.
4. Montrer que la pression est divisée par deux chaque fois que l'on monte d'environ 5545 m.
5. Quelle pression le modèle donne-t-il à $11\,000$ m, altitude de croisière d'un avion de ligne ?

Leçon 8 : l'algorithme de Briggs

Exercice 15 : Briggs à la calculatrice

On cherche une valeur approchée de $\ln 3$. On pose $a_0 = 3$ et $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4, arrondis au millionième.
2. Calculer les valeurs approchées $2^k\,(a_k - 1)$ pour $k = 1$, 2, 3 et 4.
3. On donne $a_{10} \approx 1{,}001\,073\,439$. En utilisant l'encadrement $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, encadrer $\ln 3$ et en déduire une valeur approchée au centième.
4. Comparer avec la valeur donnée par la calculatrice. Pourquoi $2^k\,(a_k - 1)$ est-elle toujours supérieure ou égale à $\ln 3$?

Une solution de BarroTech

Exercice 16 : Briggs en Python

On reprend la fonction de la vidéo :

```
from math import sqrt

def briggs(a, k):
    for i in range(k):
        a = sqrt(a)
    return 2**k * (a - 1)
```

1. Quelle valeur approchée de $\ln 10$ la fonction donne-t-elle pour $k = 20$? Combien de décimales sont exactes ?
2. Écrire une fonction `briggs_seuil(a, eps)` qui extrait des racines carrées tant que $|a - 1| > \varepsilon$ (en Python, `abs(a - 1) > eps`), puis renvoie la valeur approchée et le nombre k de racines extraites. Combien de racines faut-il pour $a = 2$ et $\varepsilon = 10^{-6}$?
3. Que renvoie `briggs(0.5, 20)` ? Expliquer ce résultat.
4. Écrire une fonction `encadrement(a, k)` qui renvoie les deux bornes $2^k\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$ et $2^k\,(a_k - 1)$.