Fonction logarithme népérien

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *On utilise* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ *et* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
   - **a.** $\ln\left(\mathrm{e}^4\right) = 4$.
   - **b.** $\mathrm{e}^{\ln 6} = 6$.
   - **c.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{-3}$, donc $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right) = -3$.
   - **d.** $\mathrm{e}^{-\ln 2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \dfrac{1}{2}$.
   - **e.** $\ln 1 + \ln \mathrm{e} = 0 + 1 = 1$.
2.
   - **a.** $10 > 0$, donc $x = \ln 10 \approx 2{,}303$.
   - **b.** $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x : **aucune solution**.
   - **c.** $x = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}086$.
   - **d.** $x = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$.
   - **e.** $x + 1 = \ln 3$, donc $x = \ln 3 - 1 \approx 0{,}099$.
3. $\ln(x-4)$ existe si $x - 4 > 0$, c'est-à-dire $x > 4$. $\ln(5 - 2x)$ existe si $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.

Une solution de ParroTech

Exercice 2

1. $V(0) = 300\,\mathrm{e}^0 = 300$: la vidéo a 300 vues au moment où on commence à compter.
2. $300\,\mathrm{e}^{0{,}5t} = 1200 \iff \mathrm{e}^{0{,}5t} = 4 \iff 0{,}5t = \ln 4 \iff t = 2\ln 4 \approx 2{,}773$. Or $0{,}773 \times 24 \approx 18{,}5$: la vidéo atteint 1200 vues au bout d'environ 2 **jours et** 18 **heures**.
3. $300\,\mathrm{e}^{0{,}5t} = 30\,000 \iff \mathrm{e}^{0{,}5t} = 100 \iff t = 2\ln 100 \approx 9{,}21$. Comme $9 < 9{,}21 < 10$, c'est **au cours du dixième jour**.
4. Pour $t \geq 0$, $0{,}5t \geq 0$ donc $\mathrm{e}^{0{,}5t} \geq 1$ et $V(t) \geq 300 > 200$. *(Par le calcul :* $\mathrm{e}^{0{,}5t} = \frac{2}{3}$ *donne* $t = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$*, qui n'est pas dans* $[0\,;+\infty[$*.)*
5. Non : $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = +\infty$, alors que le nombre de personnes susceptibles de voir la vidéo est limité. Au bout de 60 jours, le modèle prévoit déjà $300\,\mathrm{e}^{30}$ vues, bien plus que le nombre d'habitants de la Terre.

Exercice 3

1. *On décompose en produit de puissances de 2 et de 5.*

- **a.** $\ln 50 = \ln\left(2 \times 5^2\right) = \ln 2 + 2\ln 5$.
- **b.** $0{,}08 = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$, donc $\ln 0{,}08 = \ln 2 - 2\ln 5$.
- **c.** $\ln\left(\sqrt{40}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(2^3 \times 5\right) = \dfrac{3}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 5$.
- **d.** $\ln\left(\dfrac{1}{125}\right) = -\ln\left(5^3\right) = -3\ln 5$.
- **e.** $\ln 1000 = \ln\left(2^3 \times 5^3\right) = 3\ln 2 + 3\ln 5$.

2.

- **a.** $A = \ln(12 \times 3) - \ln\left(6^2\right) = \ln 36 - \ln 36 = 0$.
- **b.** $B = 5 - 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.
- **c.** $C = \ln\left(2\mathrm{e} \times \dfrac{\mathrm{e}}{2}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$.
- **d.** $D = \ln\left(\dfrac{3^2 \times 6}{18}\right) = \ln 3$.

3. $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, donc $3 - 2\sqrt{2} > 0$. Alors

$$\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \ln\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right) = \ln(9 - 8) = \ln 1 = 0.$$

Exercice 4

Une solution de BarroTech

1.

- **a.** $\ln\left(x^3\right) - \ln x = 3\ln x - \ln x = 2\ln x$.
- **b.** $\ln(\mathrm{e}\,x) - \ln x = \ln \mathrm{e} + \ln x - \ln x = 1$.
- **c.** $x^2 + 2x = x(x+2)$, avec $x > 0$ et $x + 2 > 0$: $\ln\left(x(x+2)\right) - \ln(x+2) = \ln x$.

2. $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - 2\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = 2x - 2x = 0$.

3.

- **a.** Faux : pour $a = b = 1$, $\ln 2 \approx 0{,}693$ alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$.
- **b.** Faux : pour $x = -1$, $\ln\left(x^2\right) = \ln 1 = 0$ existe, mais $\ln(-1)$ n'existe pas.
- **c.** Vrai : c'est la règle $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ avec $n = 2$.
- **d.** Faux : $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \approx 1{,}792$, alors que $\ln 2 \times \ln 3 \approx 0{,}76$.

4. *On factorise par e^{-x}.* $1 + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$, produit de deux nombres strictement positifs. Donc

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + \ln\left(1 + \mathrm{e}^x\right) = -x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^x\right).$$

Exercice 5

1. Il faut $x+2>0$ et $3x-4>0$, soit $x>\frac{4}{3}$. Alors $x+2=3x-4 \iff x=3$, qui convient. $\mathcal{S}=\{3\}$.
2. Il faut $x>0$ et $x+4>0$, soit $x>0$. Alors $\ln\big(x(x+4)\big)=\ln 5 \iff x^2+4x-5=0 \iff (x+5)(x-1)=0$. Seul 1 est positif. $\mathcal{S}=\{1\}$.
3. $3x-2=\ln 5 \iff x=\dfrac{2+\ln 5}{3}\approx 1{,}20$. $\mathcal{S}=\left\{\frac{2+\ln 5}{3}\right\}$.
4. Il faut $x>\frac{1}{2}$. Alors $2x-1=\mathrm{e}^{-1} \iff x=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-1}}{2}\approx 0{,}684$, qui convient. $\mathcal{S}=\left\{\frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{2}\right\}$.
5. Avec $X=\mathrm{e}^x>0$: $X^2+X-2=0 \iff (X+2)(X-1)=0$. $X=-2$ est impossible, donc $\mathrm{e}^x=1$, $x=0$. $\mathcal{S}=\{0\}$.
6. Avec $X=\ln x$ $(x>0)$: $X^2+X-6=0 \iff (X+3)(X-2)=0$. Donc $\ln x=-3$ ou $\ln x=2$. $\mathcal{S}=\{\mathrm{e}^{-3}\,;\mathrm{e}^2\}$.

Exercice 6

1. $\ln x\geq 2=\ln\left(\mathrm{e}^2\right) \iff x\geq \mathrm{e}^2$. $\mathcal{S}=\left[\mathrm{e}^2\,;+\infty\right[$.
2. Il faut $x>\frac{1}{2}$. $\ln(2x-1)<\ln 1 \iff 2x-1<1 \iff x<1$. $\mathcal{S}=\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.
3. $\mathrm{e}^x>4 \iff x>\ln 4=2\ln 2$. $\mathcal{S}=]2\ln 2\,;+\infty[$.
4. $-2x+1\leq \ln 3 \iff -2x\leq \ln 3-1 \iff x\geq \dfrac{1-\ln 3}{2}$ *(on divise par -2 : le sens change).*
Une solution de BacTech
$\mathcal{S}=\left[\frac{1-\ln 3}{2}\,;+\infty\right[$, avec $\frac{1-\ln 3}{2}\approx -0{,}049$.
5. Il faut $x>-1$ et $x>\frac{3}{2}$, soit $x>\frac{3}{2}$. Alors $x+1\leq 2x-3 \iff x\geq 4$. $\mathcal{S}=[4\,;+\infty[$.
6. $\ln(x-2)$ existe pour $x>2$. $\ln(x-2)<0 \iff 0<x-2<1 \iff 2<x<3$; $\ln(x-2)=0 \iff x=3$; $\ln(x-2)>0 \iff x>3$. Il est **négatif sur $]2\,;3[$, nul en 3, positif sur $]3\,;+\infty[$**.

Exercice 7

1. $f_1'(x)=\dfrac{3}{x}-2x=\dfrac{3-2x^2}{x}$.
2. *Produit.* $f_2'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.
3. *Forme u^2, de dérivée $2u'u$.* $f_3'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=\dfrac{2\ln x}{x}$.
4. *Forme $\ln(u)$, de dérivée $\frac{u'}{u}$, avec $u(x)=3x+2>0$.* $f_4'(x)=\dfrac{3}{3x+2}$.
5. $f_5'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$.
6. $u(x)=1+\mathrm{e}^{2x}>0$ et $u'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x}$: $f_6'(x)=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.
7. *Forme $\frac{1}{v}$, de dérivée $-\frac{v'}{v^2}$, avec $v=\ln$ qui ne s'annule pas sur $]1\,;+\infty[$.* $f_7'(x)=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.
8. $f_2(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}$ et $f_2'(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}+1=2$. La tangente a pour équation $y=\mathrm{e}+2(x-\mathrm{e})$, soit $y=2x-\mathrm{e}$.

Exercice 8

1. $h(0) = 2 + 3\ln 1 = 2$: le chêne mesure 2 **m** à la plantation.
2. *Forme* $\ln(u)$ *avec* $u(t) = t + 1 > 0$. $h'(t) = \dfrac{3}{t+1} > 0$: h est strictement croissante sur $[0\,;50]$.
3. $h'(0) = 3$ et $h'(9) = 0{,}3$. La vitesse de croissance est de 3 m par an à la plantation, puis de $0{,}3$ m par an au bout de 9 ans : h' est décroissante, le chêne pousse **de moins en moins vite** (la fonction h est concave).
4. $2 + 3\ln(t+1) = 10 \iff \ln(t+1) = \dfrac{8}{3} \iff t = \mathrm{e}^{8/3} - 1 \approx 13{,}4$. Le chêne atteint 10 m au bout d'environ $13{,}4$ **ans**.
5. $h(50) = 2 + 3\ln 51 \approx 13{,}80$: environ $13{,}80$ **m**.

Exercice 9

1. En 0^+ : $\ln x \to -\infty$, donc $f(x) \to +\infty$; la droite $x = 0$ est asymptote verticale. En $+\infty$: $f(x) \to -\infty$.
2. *On pose* $X = x - 3$. En 3^+ : $X \to 0^+$, donc $g(x) \to -\infty$; la droite $x = 3$ est asymptote verticale. En $+\infty$: $g(x) \to +\infty$.
3. En 0^+ comme en $+\infty$, $(\ln x)^2 \to +\infty$ (le carré d'une quantité qui tend vers $-\infty$ ou $+\infty$) ; asymptote verticale $x = 0$.
4. En 1^+ : $\ln x \to 0$ en restant strictement positif, donc $m(x) \to +\infty$; asymptote verticale $x = 1$. En $+\infty$: $\ln x \to +\infty$, donc $m(x) \to 0$; asymptote horizontale $y = 0$.
5. En $+\infty$: $X = 2 + \frac{1}{x} \to 2$, donc $r(x) \to \ln 2$; asymptote horizontale $y = \ln 2$. En 0^+ : $X \to +\infty$, donc $r(x) \to +\infty$; asymptote verticale $x = 0$.

Exercice 10

1. $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$: T a pour équation $y = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e})$, soit $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Pour $x = 0$, $y = 0$: T passe par l'origine.
2. $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $\exp'(1) = \mathrm{e}$: T' a pour équation $y = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x - 1)$, soit $y = \mathrm{e}\,x$, qui passe par l'origine.
3. $B(\ln 2\,;2)$, et $\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$: B est bien sur $\mathcal{C}$.
4. La symétrie par rapport à $y = x$ échange $\mathcal{C}$ et Γ : elle envoie le point $(1\,;\mathrm{e})$ de $\mathcal{C}$ sur le point $(\mathrm{e}\,;1)$ de Γ, et la tangente en l'un sur la tangente en l'autre. Elle échange les coordonnées : la droite $y = \mathrm{e}\,x$ devient $x = \mathrm{e}\,y$, c'est-à-dire $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Elle laisse l'origine à sa place, ce qui explique que les deux tangentes y passent.

Exercice 11

1. $\ln x - x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$; la parenthèse tend vers -1, donc la limite est $-\infty$.
2. $\dfrac{2\ln x + x}{x} = 2 \times \dfrac{\ln x}{x} + 1 \to 2 \times 0 + 1 = 1$.
3. Croissance comparée en 0 avec $n = 2$: 0.
4. $x \ln x \to 0$ et $x \to 0$: 0.
5. $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ et $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} \to 1$: 0.
6. Ce n'est pas une forme indéterminée : $x + 1 \to 1$ et $\ln x \to -\infty$, donc la limite est $-\infty$.
7. $x^2 - 3\ln x = x^2\left(1 - 3 \times \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$; la parenthèse tend vers 1, donc la limite est $+\infty$.

Exercice 12

1. En 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (démonstration du cours). En $+\infty$: $x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.
2. $f'(x) = \ln x + 1$. $f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$. Le minimum vaut $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \times (-1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	décroissante	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	croissante	$+\infty$

3. Pour $x > 0$: $x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$. Comme $x > 0$, $f(x)$ a le signe de $\ln x$: **négatif sur** $]0\,;1[$**, positif sur** $]1\,;+\infty[$.
4. Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ est $-\frac{1}{\mathrm{e}}$: $x \ln x \geq -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pour tout $x > 0$.
5. $\pi \neq \mathrm{e}$, donc $g(\pi) < g(\mathrm{e})$: $\dfrac{\ln \pi}{\pi} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. En multipliant par $\pi\,\mathrm{e} > 0$: $\mathrm{e} \ln \pi < \pi$, soit $\ln\left(\pi^{\mathrm{e}}\right) < \ln\left(\mathrm{e}^{\pi}\right)$. Comme $\ln$ est strictement croissante, $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$ (la calculatrice donne $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$ et $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$).

Exercice 13

1. Augmenter de $2\,\%$, c'est multiplier par $1{,}02$. On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}02^n \geq 2$: $n \ln 1{,}02 \geq \ln 2$, et comme $\ln 1{,}02 > 0$, $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}003$. Donc $n = 36$ **ans**. Vérification : $1{,}02^{35} \approx 1{,}9999 < 2$ et $1{,}02^{36} \approx 2{,}040 \geq 2$. *Le quotient est très proche de 35 : la vérification est indispensable.*
2. Il reste $92\,\%$ de la lumière à chaque mètre : on cherche $0{,}92^n < 0{,}01$. $n \ln 0{,}92 < \ln 0{,}01$; comme $\ln 0{,}92 < 0$, le sens change : $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}92} \approx 55{,}23$. Donc **à partir de 56 m**. Vérification : $0{,}92^{55} \approx 0{,}0102$ et $0{,}92^{56} \approx 0{,}0094$.
3. 1 km $= 10^6$ mm. On cherche $0{,}1 \times 2^n > 10^6$, soit $2^n > 10^7$: $n > \dfrac{7 \ln 10}{\ln 2} \approx 23{,}25$. Donc 24 **pliages**. Vérification : $0{,}1 \times 2^{23} \approx 838\,861$ mm, soit environ $0{,}84$ km, et $0{,}1 \times 2^{24} \approx 1\,677\,722$ mm, soit environ $1{,}68$ km.

Exercice 14

1. $P(0) = 1013$ hPa.
2. $P(4800) = 1013\,\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 556$ hPa.
3. $1013\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,125\,h} < 700 \iff \mathrm{e}^{-0{,}000\,125\,h} < \dfrac{700}{1013} \iff -0{,}000\,125\,h < \ln\left(\dfrac{700}{1013}\right) \iff h > \dfrac{\ln\left(\frac{1013}{700}\right)}{0{,}000\,125} = 8000 \ln\left(\dfrac{1013}{700}\right) \approx 2957$. La pression est inférieure à 700 hPa **au-dessus d'environ 2957 m**.
4. $P(h+d) = P(h) \times \mathrm{e}^{-0{,}000\,125\,d}$. La pression est divisée par deux si $\mathrm{e}^{-0{,}000\,125\,d} = \frac{1}{2}$, soit $d = \dfrac{\ln 2}{0{,}000\,125} = 8000 \ln 2 \approx 5545$ m. C'est la « demi-vie » de la pression, mesurée en mètres.
5. $P(11\,000) = 1013\,\mathrm{e}^{-1{,}375} \approx 256$ hPa, environ le quart de la pression au niveau de la mer.

Exercice 15

1. $a_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}732\,051$; $a_2 \approx 1{,}316\,074$; $a_3 \approx 1{,}147\,203$; $a_4 \approx 1{,}071\,075$.
2. $2\,(a_1 - 1) \approx 1{,}464\,102$; $4\,(a_2 - 1) \approx 1{,}264\,296$; $8\,(a_3 - 1) \approx 1{,}177\,622$; $16\,(a_4 - 1) \approx 1{,}137\,208$. Les valeurs diminuent vers $\ln 3$.
3. Avec $x = a_{10}$, puis en multipliant par $2^{10} = 1024$: $1024\left(1 - \dfrac{1}{a_{10}}\right) \leq \ln 3 \leq 1024\,(a_{10} - 1)$, soit
$$1{,}0980 \leq \ln 3 \leq 1{,}0993.$$
Les deux bornes s'arrondissent à $1{,}10$: $\ln 3 \approx 1{,}10$ **au centième**.
4. La calculatrice donne $\ln 3 \approx 1{,}098\,612$, bien dans l'encadrement. Comme $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (leçon 4), $\ln 3 = 2^k \ln(a_k) \leq 2^k\,(a_k - 1)$: c'est une valeur approchée **par excès**.

Exercice 16

1. `briggs(10, 20)` renvoie environ `2.3025876`, alors que $\ln 10 \approx 2{,}302\,585\,1$: **cinq décimales exactes** ($2{,}302\,58$).
2. Une solution :

```
def briggs_seuil(a, eps):
    k = 0
    while abs(a - 1) > eps:
        a = sqrt(a)
        k = k + 1
    return 2**k * (a - 1), k
```

`briggs_seuil(2, 1e-6)` renvoie `(0.6931474097073078, 20)` : il faut 20 **racines carrées**, car $a_{19} - 1 \approx 1{,}3 \times 10^{-6}$ et $a_{20} - 1 \approx 6{,}6 \times 10^{-7}$.

3. `briggs(0.5, 20)` renvoie environ `-0.6931470` : c'est une valeur approchée de $\ln 0{,}5 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$. La méthode marche aussi pour $0 < a < 1$: les racines carrées successives se rapprochent de 1 par valeurs inférieures.
4. Une solution :

```
def encadrement(a, k):
    for i in range(k):
        a = sqrt(a)
    return 2**k * (1 - 1/a), 2**k * (a - 1)
```

Une solution de BarroTech

`encadrement(2, 20)` renvoie environ `(0.6931469515, 0.6931474097)`.