Continuité et valeurs intermédiaires

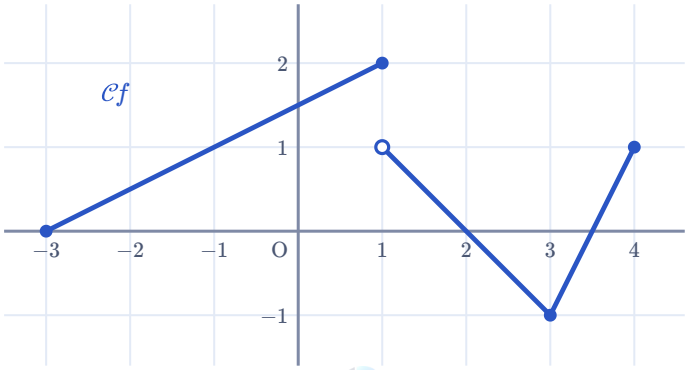
TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : continuité en un point et sur un intervalle

Exercice 1 : lire la continuité, puis la calculer

Partie A. La fonction f, définie sur $[-3\,;4]$, est représentée ci-dessous. Un disque plein indique un point de la courbe, un disque creux un point qui n'en fait pas partie.



Une solution de BarroTech

Courbe de la fonction f sur [−3 ; 4]

1. Lire $f(1)$, puis la limite à gauche et la limite à droite de f en 1. La fonction f est-elle continue en 1 ?
2. Mêmes questions en 3.
3. Sur quels intervalles la fonction f est-elle continue ?

Partie B. Étudier la continuité en a de chaque fonction.

1. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $a = 2$.
2. $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ en $a = 4$.

Exercice 2 : louer un canoë

Une base nautique loue des canoës à la journée. On note t la durée de location, en heures, et $C(t)$ le prix payé, en euros. Le tarif A est

$$C(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 5t + a & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

où a est un réel fixé par la base nautique.

1. Calculer $C(1)$ et $C(2)$.
2. Dans cette question, $a = 4$. Calculer $C(3)$, puis $\lim\limits_{t \to 2^+} C(t)$. La fonction C est-elle continue en 2 ? Expliquer pourquoi ce tarif surprendrait un client.
3. Déterminer la valeur de a pour laquelle C est continue en 2.
4. Le tarif B est de 7 euros par heure entamée, pour une durée de 3 heures au plus.
   - **a.** Exprimer le prix $T(t)$ selon la valeur de t, pour $0 < t \leq 3$.
   - **b.** La fonction T est-elle continue en $1{,}5$? en 2 ?
   - **c.** Avec la valeur de a trouvée à la question 3, comparer les prix des deux tarifs pour 2 h 30 de location.

Leçon 2 : dérivable, donc continue

Exercice 3 : limites par continuité, et un peu de logique

Une solution de Barrolech

1. Justifier la continuité de chaque fonction en a, puis en déduire la limite.
   - **a.** $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 - 4x + 1\right)$
   - **b.** $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3x + 6}$
   - **c.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x}{x^2 + 1}$
   - **d.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2 - 3}$
2. Soit $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer, pour $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et h. En déduire que f est dérivable en 0, puis qu'elle est continue en 0.
3. Soit $g(x) = \sqrt{x - 1}$ sur $[1\,;+\infty[$. Montrer que g est continue en 1, mais qu'elle n'y est pas dérivable.
4. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
   - **b.** Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a.

Exercice 4 : le raccord d'un toboggan

Dans un parc aquatique, le profil d'un toboggan est modélisé, dans un repère d'unité le mètre, par la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \quad \text{(partie droite)} \\ 0{,}25\,(x-4)^2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \quad \text{(partie courbe)} \end{cases}$$

où a et b sont deux réels. Le baigneur part du point d'abscisse 0 et arrive dans l'eau au point d'abscisse 4.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Montrer que f est continue en 2 si et seulement si $2a + b = 1$.
2. Pour éviter un angle au raccord, on veut de plus que la partie droite soit portée par la tangente à la partie courbe au point d'abscisse 2. Calculer le nombre dérivé en 2 de la fonction $x \mapsto 0{,}25\,(x-4)^2$, puis en déduire a et b.
3. Avec ces valeurs, à quelle hauteur se trouve le point de départ ? Avec quelle pente arrive-t-on dans l'eau ?
4. On choisit maintenant $a = -0{,}5$ et $b = 2$. La fonction f est-elle continue en 2 ? Que voit-on au raccord ?

Leçon 3 : le théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 5 : prouver qu'une solution existe

Une solution de BarroTech

1. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.
2. On note $g(x) = \mathrm{e}^x - 3x$. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$ (valeurs approchées au centième). En déduire que l'équation $\mathrm{e}^x = 3x$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$ et au moins une solution dans $[1\,;2]$.
3. Montrer que l'équation $x^2 + \sqrt{x} = 5$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.
4. Soit k la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $k(x) = -1$ si $x < 0$ et $k(x) = 1$ si $x \geq 0$. Le nombre 0 est compris entre $k(-1)$ et $k(1)$. L'équation $k(x) = 0$ a-t-elle une solution ? Cela contredit-il le théorème des valeurs intermédiaires ?

Exercice 6 : la randonnée au refuge

Un samedi, une randonneuse monte du parking jusqu'à un refuge de montagne, de 8 h à 14 h. Le lendemain, elle redescend par le même sentier, de 8 h à 14 h, à son rythme. On note L la longueur du sentier, en kilomètres, et, pour $t \in [8\,;14]$:

- $d_1(t)$ la distance qui la sépare du parking, le long du sentier, à l'heure t du samedi ;
- $d_2(t)$ la même distance à l'heure t du dimanche.

On admet que d_1 et d_2 sont continues sur $[8\,;14]$.

1. Donner $d_1(8)$, $d_1(14)$, $d_2(8)$ et $d_2(14)$.
2. On pose $h(t) = d_1(t) - d_2(t)$. Justifier que h est continue sur $[8\,;14]$, et calculer $h(8)$ et $h(14)$.
3. En déduire qu'il existe un endroit du sentier où la randonneuse passe à la même heure le samedi et le dimanche.
4. Le résultat reste-t-il vrai si, le dimanche, elle reste au refuge jusqu'à 9 h, puis arrive au parking à 12 h et y attend jusqu'à 14 h ?

Leçon 4 : fonction strictement monotone, une unique solution

Exercice 7 : lire un tableau de variations

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-4\,;5]$. Les flèches indiquent que f est continue et strictement monotone sur chaque intervalle.

Une solution de BarroTech

x	-4		-1		2		5
f	2	décroissante	-3	croissante	4	décroissante	1

1. Donner le nombre de solutions de chaque équation, en justifiant :
   - **a.** $f(x) = 0$
   - **b.** $f(x) = 3$
   - **c.** $f(x) = 5$
   - **d.** $f(x) = -3$
   - **e.** $f(x) = 2$
2. On note $\alpha < \beta$ les solutions de $f(x) = 0$. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $[-4\,;5]$.

Exercice 8 : l'équation $x\,\mathrm{e}^{x} = 1$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} - 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f, avec ses limites en $-\infty$ (on utilisera $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$, chapitre 4) et en $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) < 0$ pour tout $x \leq 0$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$, puis qu'elle n'en a pas d'autre sur $\mathbb{R}$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
6. Montrer que $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha$.

Leçon 5 : encadrer une solution par dichotomie

Exercice 9 : la dichotomie à la main

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution r dans $[0\,;1]$.
2. Recopier et compléter le tableau des quatre premières étapes de la dichotomie sur $[0\,;1]$ (valeurs de $g(m)$ au millième).

étape	intervalle	milieu m	$g(m)$	nouvel intervalle
1	$[0\,;1]$	$0{,}5$		
2				
3				
4				

3. En déduire un encadrement de r d'amplitude $\dfrac{1}{16}$.
4. Combien d'étapes faut-il, au départ de $[0\,;1]$, pour obtenir un encadrement d'amplitude au plus 10^{-2} ?

Exercice 10 : la jauge d'une cuve d'eau de pluie

Une maison récupère l'eau de pluie dans une cuve sphérique de rayon 1 m. Quand l'eau atteint la hauteur h, en mètres, avec $0 \leq h \leq 2$, le volume d'eau, en m³, est

$$V(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (3 - h).$$

1. Calculer $V(1)$ et $V(2)$. Que représentent ces deux valeurs ?
2. Montrer que $V'(h) = \pi h (2 - h)$, puis que V est strictement croissante sur $[0\,;2]$.
3. On veut graduer la jauge : à quelle hauteur la cuve est-elle remplie au quart ?
   - **a.** Montrer que l'équation $V(h) = \frac{\pi}{3}$ équivaut à $h^3 - 3h^2 + 1 = 0$.
   - **b.** Montrer que cette équation admet une unique solution h_0 dans $[0\,;2]$, et que $h_0 \in [0\,;1]$. On utilise le programme suivant.

```
def g(h):
    return h**3 - 3*h**2 + 1

def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if g(a) * g(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Une solution de BarroTech

4. Combien de fois la boucle tourne-t-elle pour l'appel `dichotomie(0, 1, 0.01)` ?
5. Cet appel renvoie `(0.6484375, 0.65625)`. À quelle hauteur faut-il tracer le repère « un quart », au centimètre près ?

Leçon 6 : méthodes de Newton et de la sécante

Exercice 11 : une boîte cubique de deux litres

On veut fabriquer une boîte cubique de 2 litres, c'est-à-dire de 2 dm³. Son arête x, en décimètres, vérifie $x^3 = 2$. On pose $f(x) = x^3 - 2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1\,;2]$.
2. Montrer que la méthode de Newton s'écrit $x_{n+1} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$.
3. Avec $x_0 = 1$, calculer x_1 et x_2 sous forme de fractions, puis une valeur approchée de x_3 à 10^{-5} près.
4. Comparer avec la valeur donnée par la calculatrice pour $\sqrt[3]{2}$. Quelle arête faut-il donner à la boîte, au millimètre près ?

Exercice 12 : Newton et la sécante en Python

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [0\,;1]$.
2. Écrire la formule de la méthode de Newton pour cette fonction. Pourquoi la division par $f'(x_n)$ ne pose-t-elle jamais de problème ici ?
3. Avec $x_0 = 0$, calculer x_1 à la main.
4. Recopier et compléter le programme suivant.

```
from math import exp

def f(x):
    return exp(x) + x - 2

def fp(x):
    return ...

def newton(x, n):
    for k in range(n):
        x = ...
    return x
```

5. La méthode de la sécante, avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, donne $x_2 = 1 - f(1) \times \dfrac{1-0}{f(1)-f(0)}$. Montrer que $x_2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
6. On donne `newton(0, 4)` $\approx 0{,}442\,854\,401$ et, pour la sécante, $x_6 \approx 0{,}442\,854\,401$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Leçon 7 : suites et fonctions continues

Exercice 13 : images de suites convergentes

1. Soit $u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de (u_n), puis celles des suites :
   - **a.** $\sqrt{u_n + 1}$
   - **b.** $\mathrm{e}^{u_n - 3}$
   - **c.** $\dfrac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$
2. Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$. On admet que $w_n \geq 0$ pour tout n et que (w_n) converge. Déterminer sa limite.
3. Soit (t_n) définie par $t_0 = 3$ et $t_{n+1} = t_n^2 - 2$.
   - **a.** Calculer t_1, t_2, t_3.
   - **b.** Résoudre l'équation $x^2 - 2 = x$.
   - **c.** Peut-on en déduire que (t_n) converge vers l'une de ces solutions ? Que semble faire la suite ?

Exercice 14 : les carpes d'un étang de pêche

Un étang de pêche est peuplé de carpes. On note u_n le nombre de carpes, en centaines, au début de l'année $2027 + n$. Une étude propose le modèle $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{3x}{1+x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Une solution de BarroTech

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $0{,}5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, et que $0{,}5 \leq \ell \leq 2$.
5. Justifier que $f(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ. Interpréter.
6. Calculer u_3 et u_4. En quelle année le nombre de carpes dépasse-t-il 190 pour la première fois ?