Continuité et valeurs intermédiaires

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

Partie A.

1. $f(1) = 2$ (disque plein). À gauche de 1, la courbe arrive au point $(1\,;2)$: la limite à gauche vaut 2. À droite de 1, la courbe part du point $(1\,;1)$: la limite à droite vaut 1. Comme $1 \neq f(1)$, f **n'est pas continue en** 1 : la courbe fait un saut.
2. $f(3) = -1$. À gauche, la courbe arrive en $(3\,;-1)$; à droite, elle repart du même point : les deux limites valent $-1 = f(3)$. f **est continue en** 3. La courbe y forme un angle, mais pas de saut.
3. f est continue sur $[-3\,;1]$ et sur $]1\,;4]$, mais pas sur $[-3\,;4]$.

Partie B. *On compare la limite à gauche, la limite à droite et la valeur en a.*

1. $g(2) = 4 - 4 = 0$; à gauche, $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - 2x\right) = 0$; à droite, $\lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 6) = 0$. Les trois nombres sont égaux : g **est continue en** 2.
2. $h(4) = \sqrt{4} = 2$; à gauche, la limite vaut 2 ; à droite, $\lim\limits_{x \to 4^+} (x - 1) = 3 \neq 2$. h **n'est pas continue en** 4.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. $C(1) = 8$ euros et $C(2) = 16$ euros.
2. Avec $a = 4$: $C(3) = 5 \times 3 + 4 = 19$ euros, et $\lim\limits_{t \to 2^+} C(t) = 5 \times 2 + 4 = 14$. Comme $14 \neq C(2) = 16$, C **n'est pas continue en** 2. Un client qui loue un peu plus de 2 heures paierait environ 14 euros, moins que pour 2 heures exactement : le prix « redescend » brusquement.
3. *À gauche et en 2, la valeur est $C(2) = 16$; à droite, la limite vaut $10 + a$.* C est continue en 2 si et seulement si $10 + a = 16$, c'est-à-dire $a = 6$.
4. **a.** $T(t) = 7$ si $0 < t \leq 1$, $T(t) = 14$ si $1 < t \leq 2$, et $T(t) = 21$ si $2 < t \leq 3$.
   - **b.** T est constante (égale à 14) autour de $1{,}5$: elle est **continue en** $1{,}5$. En 2, la limite à droite vaut $21 \neq T(2) = 14$: T **n'est pas continue en** 2.
   - **c.** Pour $t = 2{,}5$: tarif A, $C(2{,}5) = 5 \times 2{,}5 + 6 = 18{,}50$ euros ; tarif B, $T(2{,}5) = 21$ euros. Le tarif A est moins cher de $2{,}50$ euros.

Exercice 3

1. *Ces fonctions sont construites à partir des fonctions de référence et sont définies en a : elles sont continues en a, et la limite est la valeur en a.*
   - **a.** Polynôme : $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-4x+1\right)=9-12+1=-2$.
   - **b.** $3x+6>0$ près de 1 : $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3x+6}=\sqrt{9}=3$.
   - **c.** Le dénominateur ne s'annule pas : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+x}{x^2+1}=\dfrac{1+0}{0+1}=1$.
   - **d.** $2^2-3=1\neq 0$: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-3}=\dfrac{1}{1}=1$.
2. Pour $h>0$: $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$, qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$. Une fonction dérivable en 0 est continue en 0.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0=g(1)$: g est continue en 1. Pour $h>0$: $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}\to+\infty$ quand $h\to 0$: g n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).
4. **a. Faux.** Contre-exemple : la racine carrée est continue en 0 mais n'y est pas dérivable (ou g en 1, question 3).
   - **b. Vrai.** C'est la contraposée du théorème « dérivable en a, donc continue en a ».

Exercice 4

Une solution de BarroTech

1. $\lim\limits_{x\to 2^+}0{,}25\,(x-4)^2=0{,}25\times(-2)^2=1$. À gauche et en 2, la fonction vaut $f(2)=2a+b$ (et $ax+b$ tend vers $2a+b$). Donc f est continue en 2 si et seulement si $2a+b=1$.
2. La dérivée de $x\mapsto 0{,}25\,(x-4)^2$ est $x\mapsto 0{,}5\,(x-4)$; en 2, elle vaut $0{,}5\times(-2)=-1$. La partie droite doit avoir la même pente, donc $a=-1$, puis $b=1-2a=3$. $a=-1$ **et** $b=3$: la partie droite est la tangente $y=-x+3$.
3. Départ : $f(0)=b=3$ m. Arrivée : la dérivée de la partie courbe en 4 vaut $0{,}5\times 0=0$: on arrive dans l'eau **horizontalement**.
4. $2\times(-0{,}5)+2=1$: f est continue en 2. Mais la pente de la partie droite ($-0{,}5$) n'est pas celle de la partie courbe en 2 (-1) : le profil forme un **angle** au raccord, désagréable pour le baigneur.

Exercice 5

1. Soit $p(x) = x^3 + 2x - 5$. p est un polynôme, donc continue sur $[1\,;2]$; $p(1) = -2$ et $p(2) = 7$; 0 est compris entre -2 et 7. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.
2. $g(0) = 1$, $g(1) = \mathrm{e} - 3 \approx -0{,}28$ et $g(2) = \mathrm{e}^2 - 6 \approx 1{,}39$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $[0\,;1]$, g passe de 1 à $-0{,}28$ environ : 0 est atteint au moins une fois. Sur $[1\,;2]$, g passe d'environ $-0{,}28$ à $1{,}39$: 0 est atteint au moins une fois. Comme $g(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 3x$, l'équation $\mathrm{e}^x = 3x$ a au moins une solution dans chaque intervalle (elles sont distinctes, car 1 n'est pas solution).
3. Soit $q(x) = x^2 + \sqrt{x}$, continue sur $[1\,;2]$ (somme de fonctions continues). $q(1) = 2$ et $q(2) = 4 + \sqrt{2} \approx 5{,}41$. Comme $2 \leq 5 \leq 5{,}41$, l'équation $q(x) = 5$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.
4. k ne prend que les valeurs -1 et 1 : l'équation $k(x) = 0$ n'a **aucune solution**. Cela ne contredit pas le théorème, car k **n'est pas continue** en 0 (limite à gauche -1, $k(0) = 1$) : l'hypothèse de continuité n'est pas remplie.

Exercice 6

1. $d_1(8) = 0$ (au parking) et $d_1(14) = L$ (au refuge) ; $d_2(8) = L$ et $d_2(14) = 0$.
2. h est la différence de deux fonctions continues : elle est continue sur $[8\,;14]$. $h(8) = 0 - L = -L < 0$ et $h(14) = L - 0 = L > 0$.
3. 0 est compris entre $-L$ et L : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un instant t_0 de $[8\,;14]$ tel que $h(t_0) = 0$, c'est-à-dire $d_1(t_0) = d_2(t_0)$. À l'heure t_0, la randonneuse est au même endroit du sentier le samedi et le dimanche.
4. **Oui.** On a toujours $d_2(8) = L$ (elle est encore au refuge) et $d_2(14) = 0$ (elle attend au parking) ; d_2 reste continue. Donc $h(8) = -L$ et $h(14) = L$, et le même raisonnement s'applique. Le résultat ne dépend pas du rythme de marche.

Une solution de Barrolech

Exercice 7

1. *Sur chaque intervalle, f est continue et strictement monotone : une valeur comprise entre les valeurs aux bornes est atteinte une seule fois, une autre n'est pas atteinte.*
   - **a.** $f(x) = 0$: sur $[-4\,;-1]$, f décroît de 2 à -3 : une solution ; sur $[-1\,;2]$, f croît de -3 à 4 : une solution ; sur $[2\,;5]$, $f(x) \geq 1$: aucune. **Deux solutions.**
   - **b.** $f(x) = 3$: sur $[-4\,;-1]$, $f(x) \leq 2$: aucune ; sur $[-1\,;2]$: une ; sur $[2\,;5]$, f décroît de 4 à 1 : une. **Deux solutions.**
   - **c.** $f(x) = 5$: le maximum de f est 4. **Aucune solution.**
   - **d.** $f(x) = -3$: le minimum -3 n'est atteint qu'en $x = -1$. **Une solution.**
   - **e.** $f(x) = 2$: sur $[-4\,;-1]$, 2 est atteint en $x = -4$ seulement ; sur $[-1\,;2]$: une solution ; sur $[2\,;5]$: une solution. **Trois solutions** (attention à la borne -4).
2. $\alpha \in]-4\,;-1[$ et $\beta \in]-1\,;2[$.

x	-4		α		β		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 8

1. *Produit.* $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$, du signe de $x+1$. $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -1{,}37$. En $-\infty$: $x\,\mathrm{e}^x \to 0$, donc $f(x) \to -1$. En $+\infty$: $x\,\mathrm{e}^x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-1	décroissante	$-\mathrm{e}^{-1} - 1$	croissante	$+\infty$

2. Pour $x \leq 0$: $x \leq 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $x\,\mathrm{e}^x \leq 0$ et $f(x) \leq -1 < 0$.
3. Sur $[0\,;+\infty[$ (contenu dans $[-1\,;+\infty[$), f est continue et strictement croissante ; $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $0 \in [-1\,;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$. D'après la question 2, elle n'en a aucune sur $]-\infty\,;0]$: α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.
4. $f(0{,}56) \approx -0{,}020 < 0$ et $f(0{,}57) \approx 0{,}008 > 0$, donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.
5. $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.
6. $f(\alpha) = 0$ donne $\alpha\,\mathrm{e}^\alpha = 1$, donc $\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

Exercice 9

1. $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: g est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$; $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$; $0 \in [-1\,;1]$. D'après le corollaire, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution r dans $[0\,;1]$.
2. *On garde la moitié où g change de signe. Ici $g(0) < 0$: si $g(m) < 0$, on remplace a par m.*

étape	intervalle	milieu m	$g(m)$	nouvel intervalle
1	$[0\,;1]$	$0{,}5$	$-0{,}375$	$[0{,}5\,;1]$
2	$[0{,}5\,;1]$	$0{,}75$	$\approx 0{,}172$	$[0{,}5\,;0{,}75]$
3	$[0{,}5\,;0{,}75]$	$0{,}625$	$\approx -0{,}131$	$[0{,}625\,;0{,}75]$
4	$[0{,}625\,;0{,}75]$	$0{,}6875$	$\approx 0{,}012$	$[0{,}625\,;0{,}6875]$

3. $0{,}625 < r < 0{,}6875$, encadrement d'amplitude $\dfrac{1}{16} = 0{,}0625$.
4. Après n étapes, l'amplitude vaut $\dfrac{1}{2^n}$. Il faut $2^n \geq 100$: $2^6 = 64$ ne suffit pas, $2^7 = 128$ convient. **Sept étapes.**

Exercice 10

1. $V(1) = \dfrac{\pi}{3} \times 1 \times 2 = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ m³ : la cuve à moitié pleine. $V(2) = \dfrac{\pi}{3} \times 4 \times 1 = \dfrac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$ m³ : la cuve pleine (le volume d'une boule de rayon 1).
2. $V(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(3h^2 - h^3\right)$, donc $V'(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(6h - 3h^2\right) = \pi\left(2h - h^2\right) = \pi\, h\,(2 - h)$. Sur $]0\,;2[$, $V'(h) > 0$; V' ne s'annule qu'en 0 et en 2. Donc V est strictement croissante sur $[0\,;2]$.
3. **a.** Le quart de la cuve vaut $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$. $V(h) = \dfrac{\pi}{3} \iff h^2(3 - h) = 1 \iff 3h^2 - h^3 - 1 = 0 \iff h^3 - 3h^2 + 1 = 0$.
   - **b.** V est continue et strictement croissante sur $[0\,;2]$, avec $V(0) = 0$ et $V(2) = \dfrac{4\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{3}$ est compris entre ces valeurs : une unique solution h_0 dans $[0\,;2]$. Comme $V(0) = 0 < \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{2\pi}{3} = V(1)$, le corollaire appliqué sur $[0\,;1]$ donne une solution dans $[0\,;1]$: c'est h_0, puisqu'elle est unique.
4. L'amplitude passe de 1 à $\dfrac{1}{2^n}$ après n tours. Il faut $\dfrac{1}{2^n} \leq 0{,}01$: $2^6 = 64$ ne suffit pas ($\frac{1}{64} \approx 0{,}0156$), $2^7 = 128$ convient. **La boucle tourne sept fois.**
5. $0{,}6484 < h_0 < 0{,}6563$: l'amplitude est inférieure à $0{,}01$ et $0{,}65$ est à moins de $0{,}007$ des deux bornes. On trace le repère « un quart » à 65 **cm** du fond.

Exercice 11

1. $f'(x) = 3x^2 > 0$ sur $[1\,;2]$: f est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$; $f(1) = -1$ et $f(2) = 6$; $0 \in [-1\,;6]$. L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1\,;2]$.
2. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \dfrac{3x_n^3 - x_n^3 + 2}{3x_n^2} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2} = \dfrac{2}{3}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n^2}\right)$.
3. $x_1 = \dfrac{2}{3}(1+1) = \dfrac{4}{3}$; $\quad x_2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{9}{16}\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{91}{48} = \dfrac{91}{72} \approx 1{,}263\,89$; $\quad x_3 \approx 1{,}259\,93$.
4. La calculatrice donne $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}259\,92$: après trois étapes, x_3 a déjà quatre décimales exactes. L'arête vaut environ $1{,}26$ dm, soit $12{,}6$ **cm** au millimètre près.

Exercice 12

1. $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$, $\mathrm{e}^x \to 0$ et $x - 2 \to -\infty$, donc $f(x) \to -\infty$; en $+\infty$, $f(x) \to +\infty$. D'après le corollaire, $f(x) = 0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$, on a $\alpha \in [0\,;1]$.
2. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\mathrm{e}^{x_n} + x_n - 2}{\mathrm{e}^{x_n} + 1}$. Le dénominateur $\mathrm{e}^{x_n} + 1$ est toujours strictement positif : il ne s'annule jamais.
3. $x_1 = 0 - \dfrac{1 + 0 - 2}{1 + 1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.
4. `return exp(x) + 1` dans `fp`, et `x = x - f(x) / fp(x)` dans la boucle.
5. $f(1) = \mathrm{e} - 1$ et $f(0) = -1$, donc $f(1) - f(0) = \mathrm{e}$ et $x_2 = 1 - \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}} = 1 - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.
6. Les deux méthodes donnent $0{,}442\,854\,4$ environ : $\alpha \approx 0{,}442\,854$ à 10^{-6} près.

Exercice 13

1. $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, donc $u_n \to 3$. *Chaque fonction est continue en 3 : on remplace u_n par 3.*
   - **a.** $\sqrt{u_n + 1} \to \sqrt{4} = 2$.
   - **b.** $\mathrm{e}^{u_n - 3} \to \mathrm{e}^0 = 1$.
   - **c.** $\dfrac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} \to \dfrac{10}{2} = 5$ (pour tout n, $u_n \geq 2$, donc $u_n - 1 \neq 0$).
2. $w_{n+1} = f(w_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, continue sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. La limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$ (passage à la limite dans $w_n \geq 0$) et $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, donc $\ell^2 = 2\ell + 3$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = (\ell - 3)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.
3. **a.** $t_1 = 7$, $t_2 = 47$, $t_3 = 2207$.
   - **b.** $x^2 - 2 = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$.
   - **c. Non.** Ces solutions sont seulement les limites possibles **si** la suite converge. Ici les termes grandissent très vite : la suite semble tendre vers $+\infty$ (on peut montrer par récurrence que $t_n \geq n + 3$).

Exercice 14

1. $u_1 = \dfrac{1{,}5}{1{,}5} = 1$ et $u_2 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.
2. *Quotient.* $f'(x) = \dfrac{3(1+x) - 3x}{(1+x)^2} = \dfrac{3}{(1+x)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $0{,}5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ».
   - *Initialisation* : $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = 1$, donc $0{,}5 \leq 0{,}5 \leq 1 \leq 2$.
   - *Hérédité* : si $0{,}5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, comme f est croissante, $f(0{,}5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$, soit $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$, et $0{,}5 \leq 1$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : pour tout n, $0{,}5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
4. La suite est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans $0{,}5 \leq u_n \leq 2$, on obtient $0{,}5 \leq \ell \leq 2$.
5. f est continue sur $[0{,}5\,;2]$, intervalle qui contient tous les termes et ℓ : donc $f(\ell) = \ell$. $\dfrac{3\ell}{1+\ell} = \ell \iff 3\ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 - 2\ell = 0 \iff \ell(\ell-2) = 0$. Comme $\ell \geq 0{,}5$, $\ell = 2$: à long terme, l'étang compterait environ 200 carpes.
6. $u_3 = \dfrac{4{,}5}{2{,}5} = 1{,}8$ et $u_4 = \dfrac{5{,}4}{2{,}8} = \dfrac{27}{14} \approx 1{,}929$. La suite est croissante, $u_3 < 1{,}9$ et $u_4 > 1{,}9$: le nombre de carpes dépasse 190 pour la première fois au début de l'année 2031.

Une solution de BarroTech