Dénombrement

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : ensembles, principe additif et principe multiplicatif

Exercice 1 : vélos et trottinettes

Une enquête est menée auprès des 200 habitants d'une résidence : 120 possèdent un vélo, 75 possèdent une trottinette, et 40 possèdent les deux. On note V l'ensemble des habitants qui ont un vélo, et T l'ensemble de ceux qui ont une trottinette.

1. Représenter la situation par un diagramme, puis compléter un tableau à double entrée (lignes V et $\overline{V}$, colonnes T et $\overline{T}$, avec les totaux).
2. Combien d'habitants possèdent au moins l'un des deux ? Écrire ce nombre avec la notation Card.
3. Combien d'habitants ne possèdent ni vélo ni trottinette ?
4. Combien d'habitants possèdent exactement l'un des deux ?
5. Pourquoi ne peut-on pas répondre à la question 2 en calculant $120 + 75$?

Exercice 2 : produit cartésien et formules de boulangerie

Une solution de BarroTech

1. On pose $E = \{1\,;2\,;3\}$ et $F = \{x\,;y\}$.
   - **a.** Écrire tous les éléments de $E \times F$, puis tous ceux de $F \times E$. A-t-on $E \times F = F \times E$?
   - **b.** Combien d'éléments a $E \times E$?
2. Une boulangerie propose 5 sandwichs, 4 boissons et 3 desserts. Elle vend une formule « sandwich et boisson », et une formule « sandwich, boisson et dessert ».
   - **a.** Combien de formules « sandwich et boisson » différentes un client peut-il composer ?
   - **b.** Combien de formules « sandwich, boisson et dessert » ?
   - **c.** Combien de formules différentes en tout ? Quel principe utilise-t-on ?
3. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** $(2\,;5) = (5\,;2)$.
   - **b.** $\{2\,;5\} = \{5\,;2\}$.
   - **c.** Si $\mathrm{Card}(A) = 3$ et $\mathrm{Card}(B) = 4$, alors $\mathrm{Card}(A \times B) = 7$.

Leçon 2 : listes et parties d'un ensemble

Exercice 3 : des listes partout

1. Écrire tous les triplets de $\{0\,;1\}$. Combien y en a-t-il ?
2. Un mot de passe est formé de 6 caractères, chacun choisi parmi les 26 lettres minuscules et les 10 chiffres.
   - **a.** Combien de mots de passe différents peut-on former ?
   - **b.** Même question avec 8 caractères. Par combien le nombre de mots de passe est-il multiplié ?
3. **Génétique.** Combien de suites différentes de 5 bases d'ADN (parmi A, C, G, T) existe-t-il ?
4. **Informatique.** Sur un écran, une couleur est codée par trois nombres (rouge, vert, bleu), chacun étant un octet, c'est-à-dire un nombre entier de 0 à 255. Combien de couleurs peut-on coder ?

Exercice 4 : les parties d'un ensemble

1. Écrire toutes les parties de $E = \{1\,;2\,;3\,;4\}$, rangées selon leur nombre d'éléments. Combien y en a-t-il ? Vérifier avec la propriété du cours.
2. On code chaque partie de E par un 4-uplet de 0 et de 1, comme dans le cours.
   - **a.** Donner le code de la partie $\{2\,;4\}$.
   - **b.** Quelle partie est codée par $(1\,;1\,;0\,;1)$?
3. Une pizzeria propose une base, sur laquelle on ajoute ou non chacun de 8 ingrédients.
   - **a.** Combien de pizzas différentes peut-on composer ?
   - **b.** Combien de pizzas ont au moins deux ingrédients ?
4. On répète 5 fois une épreuve à deux issues : succès S ou échec $\overline{S}$.
   - **a.** Combien y a-t-il d'issues ?
   - **b.** En codant un succès par 1 et un échec par 0, écrire l'issue qui correspond au mot 10110.

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : listes d'éléments distincts, permutations

Exercice 5 : calculer avec des factorielles

1. Calculer sans calculatrice : $6!$; $\dfrac{7!}{5!}$; $\dfrac{10!}{8!\times 2!}$; $0!+1!$.
2. Simplifier, pour tout entier $n \geq 2$: $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; $\dfrac{n!}{(n-2)!}$; $\dfrac{(n+2)!}{n!}$.
3. Déterminer l'entier $n \geq 2$ tel que $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 56$.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $n! > 10^6$.

Exercice 6 : podiums, étagères et mots

1. Douze nageurs disputent une finale. Combien de podiums (or, argent, bronze) sont possibles ?
2. On range 6 livres différents sur une étagère.
   - **a.** Combien de rangements sont possibles ?
   - **b.** Deux de ces livres sont les tomes 1 et 2 d'un même roman. Combien de rangements placent le tome 1 juste à gauche du tome 2 ? *Indication : on peut considérer les deux tomes comme un seul bloc.*
3. On écrit des mots de 5 lettres (ayant un sens ou non) en utilisant une fois chacune des lettres du mot PLAGE.
   - **a.** Combien de mots peut-on écrire ?
   - **b.** Combien de ces mots commencent par une voyelle ?
4. On considère les codes de 4 chiffres, de 0000 à 9999.
   - **a.** Combien de codes ont leurs 4 chiffres tous différents ?
   - **b.** Quelle proportion de l'ensemble des codes cela représente-t-il ?

Leçon 4 : combinaisons

Exercice 7 : combinaisons, par l'énumération et par le calcul

1. Écrire toutes les parties à 3 éléments de $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$. Combien y en a-t-il ?
2. Calculer, avec la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$: $\binom{6}{2}$; $\binom{8}{3}$; $\binom{10}{4}$.
3. Vérifier à la calculatrice que $\binom{25}{5} = 53\,130$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Exercice 8 : comités et jeux de cartes

1. Une association compte 15 bénévoles.
   - **a.** Combien de comités de 4 bénévoles, sans poste particulier, peut-on former ?
   - **b.** Combien de comités de 4 bénévoles, dont l'un est désigné comme président, peut-on former ? Donner deux méthodes.
   - **c.** Combien de bureaux (un président, un vice-président, un trésorier, un secrétaire) peut-on former ? Retrouver ce nombre à partir de la question a.
2. Un jeu de 32 cartes contient 8 cœurs. On reçoit une main de 4 cartes.
   - **a.** Combien de mains différentes existe-t-il ?
   - **b.** Combien de mains ne contiennent que des cœurs ?
   - **c.** Combien de mains ne contiennent aucun cœur ?
   - **d.** En déduire le nombre de mains qui contiennent au moins un cœur.

Leçon 5 : valeurs particulières, symétrie, relation de Pascal

Exercice 9 : valeurs particulières et symétrie

1. Calculer $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{6}$ et $\binom{7}{7}$.
2. Calculer $\binom{20}{18}$ sans calculatrice.
3. Dans un tournoi de volley-ball, chaque équipe rencontre une fois chacune des autres.
   - **a.** Il y a 66 matchs. Combien y a-t-il d'équipes ?
   - **b.** Si chaque paire d'équipes se rencontre deux fois (match aller et match retour), combien de matchs jouent ces équipes ?
4. Un polygone convexe a n sommets ($n \geq 4$). Une diagonale est un segment qui joint deux sommets non voisins.
   - **a.** Combien de segments joignent deux sommets ? En déduire que le polygone a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
   - **b.** Combien de diagonales a un décagone (dix sommets) ?

Exercice 10 : la relation de Pascal

1. On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{4} = 126$. Calculer $\binom{10}{4}$.
2. Vérifier la relation de Pascal pour $n = 5$ et $k = 1$, en calculant chacun des trois nombres.
3. Démontrer par le calcul que, pour tout entier $n \geq 2$, $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$.
4. Une classe compte $n+1$ élèves ($n \geq 3$), parmi lesquels Sami. On forme des groupes de 3 élèves. En distinguant les groupes qui contiennent Sami et ceux qui ne le contiennent pas, démontrer que $\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.
5. En appliquant trois fois la relation de Pascal, montrer que, pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n-2$:

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

Une solution de BarroTech

Leçon 6 : triangle de Pascal, mots et chemins

Exercice 11 : le triangle de Pascal

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 8.
2. Lire $\binom{8}{3}$ et $\binom{8}{5}$. Quelle propriété retrouve-t-on ?
3. Calculer la somme des nombres de la ligne 8. Comment pouvait-on prévoir ce résultat ?
4. Un ensemble E a 8 éléments. Combien a-t-il de parties ayant au plus 3 éléments ? Au moins 4 éléments ?
5. Écrire avec le symbole Σ la somme $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, puis calculer sa valeur en fonction de n.

Exercice 12 : mots et chemins

1. On écrit des mots de longueur 6 avec les lettres 0 et 1.
   - **a.** Combien de mots contiennent exactement deux fois la lettre 1 ?
   - **b.** Combien de mots contiennent au plus deux fois la lettre 1 ?
   - **c.** Combien de mots contiennent au moins trois fois la lettre 1 ?
2. On répète 4 fois une épreuve à deux issues, succès S ou échec $\overline{S}$. Combien d'issues comportent exactement 3 succès ? Les écrire.

Une solution de BarroTech

3. Dans un quartier dont les rues forment un quadrillage, on va du point A au point B, situé 5 rues plus à droite et 3 rues plus haut, en allant toujours vers la droite ou vers le haut.
   - **a.** Combien de trajets différents existe-t-il ?
   - **b.** Le point C est situé 2 rues à droite et 1 rue plus haut que A. Combien de trajets de A à B passent par C ?
   - **c.** Combien de trajets de A à B ne passent pas par C ?

Leçon 7 : algorithmes en Python

Exercice 13 : le triangle de Pascal en Python

On reprend les fonctions `ligne_suivante` et `pascal` du cours.

```
def ligne_suivante(L):
    M = [1]
    for k in range(1, len(L)):
        M.append(L[k-1] + L[k])
    M.append(1)
    return M

def pascal(n):
    L = [1]
    for i in range(n):
        L = ligne_suivante(L)
    return L
```

1. Que renvoie `ligne_suivante([1, 4, 6, 4, 1])` ?
2. Que renvoie `pascal(6)` ?
3. Écrire la fonction `pascal` en langage naturel, avec le symbole « $\leftarrow$ ».
4. Écrire une fonction `coefficient(n, k)` qui renvoie $\binom{n}{k}$ en utilisant la fonction `pascal`. Que renvoie `coefficient(10, 3)` ?
5. Que renvoie l'instruction `[sum(pascal(n)) for n in range(11)]` ? Justifier sans exécuter le programme.

Exercice 14 : parties et permutations en Python

1. On exécute les instructions suivantes.

```
E = [1, 2, 3, 4]
P = [[a, b] for a in E for b in E if a < b]
```

- **a.** Écrire la liste `P`. Que vaut `len(P)` ? Justifier par un calcul.
- **b.** On remplace la condition `a < b` par `a != b`. Combien d'éléments la liste contient-elle alors ? Que représentent-ils ?

2. Écrire une liste en compréhension qui contient les parties à 3 éléments de `[1, 2, 3, 4, 5, 6]`. Combien d'éléments contient-elle ?
3. On reprend la fonction `permutations` du cours.
   - **a.** Combien d'éléments a `permutations(['a', 'b', 'c', 'd'])` ?
   - **b.** Modifier la fonction pour qu'elle renvoie les k-uplets d'éléments distincts d'une liste E, avec k en paramètre. Combien de listes obtient-on pour `['a', 'b', 'c', 'd']` et $k = 2$?
4. On reprend la fonction `permutation_hasard` du cours. Pourquoi la boucle `while` s'arrête-t-elle toujours ? Combien de fois la fonction `randint` est-elle appelée pour une liste de n éléments ?

Leçon 8 : reconnaître l'objet à dénombrer

Exercice 15 : quel objet compter ?

Solution de BarroTech

Pour chaque situation, dire si l'ordre compte et si les répétitions sont permises, nommer l'objet à dénombrer, puis donner le nombre de possibilités.

1. Un code de téléphone de 4 chiffres.
2. Désigner 2 délégués, sans fonction particulière, dans une classe de 30 élèves.
3. Élire, dans cette classe, un délégué et un suppléant.
4. Placer 5 invités sur 5 chaises alignées.
5. Lancer trois fois de suite un dé à six faces, en notant les résultats dans l'ordre.
6. Même question si l'on ne retient que les suites de trois résultats tous différents.
7. Tirer simultanément 3 boules dans une urne qui contient 12 boules numérotées.
8. Écrire des mots avec les cinq lettres du mot RADAR, chacune utilisée une fois.

Exercice 16 : le contrôle de qualité

Un lot de 20 ampoules contient 3 ampoules défectueuses. Un contrôleur prélève simultanément 4 ampoules du lot.

1. Combien de prélèvements différents sont possibles ?
2. Combien de prélèvements ne contiennent aucune ampoule défectueuse ?
3. En déduire le nombre de prélèvements qui contiennent au moins une ampoule défectueuse.
4. Combien de prélèvements contiennent exactement une ampoule défectueuse ? exactement deux ? exactement trois ? Vérifier la cohérence avec la question 3.
5. Tous les prélèvements ont la même probabilité. Calculer la probabilité que le prélèvement contienne au moins une ampoule défectueuse. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au centième.
6. Le contrôleur prélève maintenant les ampoules une par une, sans remise, et note l'ordre. Combien de résultats sont possibles ? Quel lien y a-t-il avec la question 1 ?

Une solution de BarroTech