Dénombrement

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *On découpe en morceaux disjoints.* Vélo seulement : $120 - 40 = 80$; trottinette seulement : $75 - 40 = 35$; les deux : 40. Le diagramme montre deux disques qui se recouvrent, avec 80, 40 et 35 dans les trois zones, et 45 à l'extérieur (question 3).

	T	$\overline{T}$	**Total**
V	40	80	120
$\overline{V}$	35	45	80
Total	75	125	200

2. Les groupes « vélo seulement », « trottinette seulement » et « les deux » sont disjoints. Par le principe additif : $80 + 35 + 40 = 155$. **$\text{Card}(V \cup T) = 155$.**
3. Par complémentaire : $200 - 155 = 45$ habitants n'ont ni vélo ni trottinette.
4. Exactement l'un des deux : $80 + 35 = 115$ habitants.
5. V et T ne sont pas disjoints : dans $120 + 75 = 195$, les 40 habitants qui ont les deux sont comptés deux fois. On retrouve $195 - 40 = 155$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. **a.** $E \times F = \{(1\,;x), (1\,;y), (2\,;x), (2\,;y), (3\,;x), (3\,;y)\}$ et $F \times E = \{(x\,;1), (x\,;2), (x\,;3), (y\,;1), (y\,;2), (y\,;3)\}$. Ces deux ensembles ont 6 éléments chacun, mais ils sont différents : le couple $(1\,;x)$ appartient à $E \times F$ et pas à $F \times E$. *Dans un couple, l'ordre compte.*
   b. $\text{Card}(E \times E) = 3 \times 3 = 9$.
2. **a.** Une formule est un couple (sandwich ; boisson) : $5 \times 4 = 20$ formules.
   b. Un triplet (sandwich ; boisson ; dessert) : $5 \times 4 \times 3 = 60$ formules.
   c. Les deux types de formules ne se recouvrent pas : par le **principe additif**, $20 + 60 = 80$ formules.
3. **a. Faux** : le premier élément de $(2\,;5)$ est 2, celui de $(5\,;2)$ est 5.
   b. Vrai : un ensemble ne dépend pas de l'ordre d'écriture de ses éléments.
   c. Faux : par le principe multiplicatif, $\text{Card}(A \times B) = 3 \times 4 = 12$.

Exercice 3

1. Les triplets de $\{0\,;1\}$ sont $(0\,;0\,;0)$, $(0\,;0\,;1)$, $(0\,;1\,;0)$, $(0\,;1\,;1)$, $(1\,;0\,;0)$, $(1\,;0\,;1)$, $(1\,;1\,;0)$, $(1\,;1\,;1)$: il y en a $2^3 = 8$.
2. **a.** Chaque caractère est choisi parmi $26 + 10 = 36$ possibilités (principe additif). Un mot de passe est un 6-uplet : $36^6 = 2\,176\,782\,336$ mots de passe.
   b. $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$. Le nombre est multiplié par $36^2 = 1\,296$.
3. Une suite de 5 bases est un 5-uplet de $\{A\,;C\,;G\,;T\}$: $4^5 = 1\,024$ suites.
4. Un octet prend 256 valeurs. Une couleur est un triplet d'octets : $256^3 = 16\,777\,216$ couleurs.

Exercice 4

1. Les parties de $E = \{1\,;2\,;3\,;4\}$:
   - 0 élément : $\varnothing$;
   - 1 élément : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$;
   - 2 éléments : $\{1\,;2\}$, $\{1\,;3\}$, $\{1\,;4\}$, $\{2\,;3\}$, $\{2\,;4\}$, $\{3\,;4\}$;
   - 3 éléments : $\{1\,;2\,;3\}$, $\{1\,;2\,;4\}$, $\{1\,;3\,;4\}$, $\{2\,;3\,;4\}$;
   - 4 éléments : E.

   Soit $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ parties, et le cours donne bien $2^4 = 16$.
2. **a.** $\{2\,;4\}$ contient le deuxième et le quatrième élément : code $(0\,;1\,;0\,;1)$.
   b. $(1\,;1\,;0\,;1)$ code la partie $\{1\,;2\,;4\}$.
Création de BarroTech
3. **a.** Une pizza correspond à une partie de l'ensemble des 8 ingrédients : $2^8 = 256$ pizzas.
   b. *On retire les pizzas qui ont moins de deux ingrédients.* Il y a 1 pizza sans ingrédient et 8 pizzas à un seul ingrédient : $256 - 1 - 8 = 247$ pizzas ont au moins deux ingrédients.
4. **a.** Une issue est un 5-uplet de $\{S\,;\overline{S}\}$: $2^5 = 32$ issues.
   b. Le mot 10110 correspond à l'issue $(S\,;\overline{S}\,;S\,;S\,;\overline{S})$.

Exercice 5

1. $6! = 720$; $\dfrac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$; $\dfrac{10!}{8! \times 2!} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$; $0! + 1! = 1 + 1 = 2$.
2. $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n + 1$; $\dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$; $\dfrac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$. *Dans $\frac{n!}{(n-2)!}$, les facteurs de 1 à $n-2$ se simplifient : il reste les deux plus grands, n et $n-1$.*
3. $n(n-1) = 56 \iff n^2 - n - 56 = 0 \iff (n-8)(n+7) = 0$. Comme $n \geq 2$, $n = 8$. Contrôle : $8 \times 7 = 56$.
4. $9! = 362\,880 < 10^6$ et $10! = 3\,628\,800 > 10^6$. Comme la suite des factorielles est croissante, **le plus petit entier est** $n = 10$.

Exercice 6

1. Un podium est un triplet de nageurs distincts : $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ podiums.
2. **a.** Un rangement est une permutation des 6 livres : $6! = 720$ rangements.
   b. On colle les deux tomes, dans l'ordre « tome 1, tome 2 », en un seul bloc. On range alors 5 objets (le bloc et les 4 autres livres) : $5! = 120$ rangements.
3. **a.** Les 5 lettres sont différentes : un mot est une permutation des lettres, $5! = 120$ mots.
   b. Deux voyelles possibles pour la première lettre (A ou E), puis une permutation des 4 lettres restantes : $2 \times 4! = 48$ mots.
4. **a.** Un 4-uplet de chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ codes.
   b. $\dfrac{5\,040}{10\,000} = 0{,}504$, soit $50{,}4\,\%$ des codes.

Exercice 7

1. Les parties à 3 éléments de $\{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$: $\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\,;d\}$, $\{a\,;b\,;e\}$, $\{a\,;c\,;d\}$, $\{a\,;c\,;e\}$, $\{a\,;d\,;e\}$, $\{b\,;c\,;d\}$, $\{b\,;c\,;e\}$, $\{b\,;d\,;e\}$, $\{c\,;d\,;e\}$. Il y en a $10 = \binom{5}{3}$.
2. $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$; $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$; $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = \dfrac{5\,040}{24} = 210$.
3. La calculatrice donne bien $53\,130$. Par la formule : $\dfrac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21}{120} = \dfrac{6\,375\,600}{120} = 53\,130$.
4. Pour $k = 3$, le numérateur a trois facteurs, n, $n-1$ et $n-2$, et $3! = 6$: $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 8

1. **a.** Un comité est une partie à 4 éléments : $\binom{15}{4} = 1\,365$ comités.
   b. *Méthode 1* : on choisit le président (15 choix), puis les 3 autres membres parmi les 14 bénévoles restants : $15 \times \binom{14}{3} = 15 \times 364 = 5\,460$. *Méthode 2* : on choisit le comité ($1\,365$ choix), puis son président parmi ses 4 membres : $1\,365 \times 4 = 5\,460$.
   c. Un bureau est un 4-uplet de bénévoles distincts : $15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32\,760$. Chaque comité donne $4! = 24$ bureaux : $1\,365 \times 24 = 32\,760$.
2. **a.** $\binom{32}{4} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{24} = 35\,960$ mains.
   b. Les 4 cartes sont choisies parmi les 8 cœurs : $\binom{8}{4} = 70$ mains.
   c. Les 4 cartes sont choisies parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs : $\binom{24}{4} = 10\,626$ mains.
   d. *« Au moins un cœur » est le contraire de « aucun cœur ».* $35\,960 - 10\,626 = 25\,334$ mains.

Exercice 9

1. $\binom{7}{0}=1$, $\binom{7}{1}=7$, $\binom{7}{2}=\dfrac{7\times 6}{2}=21$, $\binom{7}{6}=\binom{7}{1}=7$ (symétrie) et $\binom{7}{7}=1$.
2. Par symétrie, $\binom{20}{18}=\binom{20}{2}=\dfrac{20\times 19}{2}=190$.
3. **a.** Un match correspond à une paire d'équipes. Avec n équipes, il y a $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ matchs. On résout $n(n-1)=132$, soit $n^2-n-132=0$, c'est-à-dire $(n-12)(n+11)=0$. Comme $n>0$, **il y a 12 équipes**.
   b. Chaque paire joue deux fois : $2\times 66=132$ matchs. *C'est aussi le nombre de couples d'équipes distinctes (recevant ; visiteur) :* $12\times 11=132$.
4. **a.** Un segment joignant deux sommets correspond à une paire de sommets : $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ segments. Parmi eux, n sont des côtés. Il reste $\dfrac{n(n-1)}{2}-n=\dfrac{n(n-1)-2n}{2}=\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
   b. Pour $n=10$: $\dfrac{10\times 7}{2}=35$ diagonales.

Exercice 10

1. Par la relation de Pascal, $\binom{10}{4}=\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=84+126=210$.
2. $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=5+10=15$ et $\binom{6}{2}=\dfrac{6\times 5}{2}=15$: la relation est vérifiée.
3. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{2n+n^2-n}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}=\dfrac{(n+1)n}{2}=\binom{n+1}{2}$.
4. Un groupe de 3 élèves est une partie à 3 éléments de la classe : il y en a $\binom{n+1}{3}$.
   - Les groupes qui contiennent Sami : on choisit ses 2 partenaires parmi les n autres élèves, soit $\binom{n}{2}$ groupes.
   - Les groupes qui ne contiennent pas Sami : on choisit les 3 élèves parmi les n autres, soit $\binom{n}{3}$ groupes.

   Ces deux catégories sont disjointes et couvrent tous les groupes. Par le principe additif, $\binom{n+1}{3}=\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$.
5. On regroupe les termes deux par deux, et on applique la relation de Pascal (les conditions $0\le k\le n-1$ et $0\le k+1\le n-1$ sont vérifiées car $k\le n-2$) :
   $$\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right]+\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}\right]=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k+2}.$$
   Une troisième application, avec $n+1$ à la place de n et $k+1$ à la place de k (valable car $k+1\le n$), donne $\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}$.

Exercice 11

1. Lignes 0 à 8 du triangle :

n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

2. $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$: c'est la symétrie $\binom{8}{8-3} = \binom{8}{3}$.

3. $1+8+28+56+70+56+28+8+1 = 256$. On pouvait le prévoir : la somme des nombres de la ligne n vaut 2^n, et $2^8 = 256$.

4. Au plus 3 éléments : $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1+8+28+56 = 93$ parties. Au moins 4 éléments : c'est le complémentaire, $256 - 93 = 163$ parties.

5. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$.

Exercice 12

1. a. On choisit les 2 positions des lettres 1 parmi 6 : $\binom{6}{2} = 15$ mots.

b. Zéro, une ou deux lettres 1 (cas disjoints) : $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 1+6+15 = 22$ mots.

c. Il y a $2^6 = 64$ mots en tout. Par complémentaire : $64 - 22 = 42$ mots.

2. On choisit les rangs des 3 succès parmi 4 : $\binom{4}{3} = 4$ issues : $(S\,;S\,;S\,;\overline{S})$, $(S\,;S\,;\overline{S}\,;S)$, $(S\,;\overline{S}\,;S\,;S)$ et $(\overline{S}\,;S\,;S\,;S)$.

3. a. Un trajet est un mot de 8 lettres avec 5 lettres D et 3 lettres H. On choisit les places des H : $\binom{8}{3} = 56$ trajets.

b. *Un trajet qui passe par C est formé d'un trajet de A à C, puis d'un trajet de C à B : on multiplie.* De A à C : 3 lettres, dont 1 lettre H, soit $\binom{3}{1} = 3$ trajets. De C à B : 3 rues à droite et 2 vers le haut, soit $\binom{5}{2} = 10$ trajets. En tout, $3 \times 10 = 30$ trajets.

c. Par complémentaire : $56 - 30 = 26$ trajets.

Exercice 13

1. `ligne_suivante([1, 4, 6, 4, 1])` renvoie `[1, 5, 10, 10, 5, 1]` : 1, puis $1+4$, $4+6$, $6+4$, $4+1$, puis 1.
2. `pascal(6)` renvoie la ligne 6 : `[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]`.
3. En langage naturel :

```
L ← [1]
Pour i allant de 0 à n − 1
    L ← ligne_suivante(L)
Fin Pour
Renvoyer L
```

4. Une fonction possible :

```
def coefficient(n, k):
    return pascal(n)[k]
```

La ligne n est la liste $\left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right]$, et l'élément d'indice k est $\binom{n}{k}$. `coefficient(10, 3)` renvoie $\binom{10}{3} = 120$.

5. La somme de la ligne n vaut 2^n : l'instruction renvoie `[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]`.

Une solution de BarroTech

Exercice 14

1. a. `P` vaut `[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]`, donc `len(P)` vaut 6. *La condition `a < b` donne chaque partie à deux éléments une seule fois :* $\binom{4}{2} = 6$.

b. Avec `a != b`, on obtient les couples d'éléments distincts, dans les deux ordres : $4 \times 3 = 12$ éléments. Ce sont les 2-uplets d'éléments distincts de `E`.

2. Une liste possible :

```
F = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
P3 = [[a, b, c] for a in F for b in F for c in F if a < b < c]
```

Elle contient $\binom{6}{3} = 20$ éléments.

3. a. $4! = 24$ éléments.

b. Il suffit de faire k étapes au lieu de `len(E)` :

```
def uplets_distincts(E, k):
    P = [[]]
    for etape in range(k):
        P = [p + [x] for p in P for x in E if x not in p]
    return P
```

Pour `['a', 'b', 'c', 'd']` et $k = 2$, on obtient $4 \times 3 = 12$ listes.

Une solution de BarroTech

4. À chaque passage dans la boucle, `reste.pop(i)` retire un élément de `reste` : sa longueur diminue de 1. Partie de n, elle atteint 0 après n passages, et la condition `len(reste) > 0` devient fausse. La fonction `randint` est donc appelée exactement n fois.

Exercice 15

	Ordre ?	Répétitions ?	Objet	Nombre
1.	oui	oui	4-uplet de chiffres	$10^4 = 10\,000$
2.	non	non	partie à 2 éléments	$\binom{30}{2} = 435$
3.	oui	non	couple d'élèves distincts	$30 \times 29 = 870$
4.	oui (on range tout)	non	permutation	$5! = 120$
5.	oui	oui	triplet de résultats	$6^3 = 216$
6.	oui	non	triplet de résultats distincts	$6 \times 5 \times 4 = 120$
7.	non	non	partie à 3 éléments	$\binom{12}{3} = 220$
8.	oui	lettres répétées	choix des positions de chaque lettre	30

8. *Les lettres se répètent : on choisit des positions.* On place les deux R : $\binom{5}{2} = 10$ choix ; puis les deux A parmi les 3 places restantes : $\binom{3}{2} = 3$ choix ; le D prend la dernière place. Il y a $10 \times 3 = 30$ mots.

Exercice 16

1. Un prélèvement simultané est une partie à 4 éléments du lot : $\binom{20}{4} = 4\,845$ prélèvements.
2. Les 4 ampoules sont choisies parmi les 17 ampoules en bon état : $\binom{17}{4} = 2\,380$.
3. Par complémentaire : $4\,845 - 2\,380 = 2\,465$ prélèvements contiennent au moins une ampoule défectueuse.
4. *On choisit les ampoules défectueuses, puis les autres : on multiplie.*
   - Exactement une : $\binom{3}{1} \times \binom{17}{3} = 3 \times 680 = 2\,040$.
   - Exactement deux : $\binom{3}{2} \times \binom{17}{2} = 3 \times 136 = 408$.
   - Exactement trois : $\binom{3}{3} \times \binom{17}{1} = 1 \times 17 = 17$.

   Ces cas sont disjoints, et $2\,040 + 408 + 17 = 2\,465$: on retrouve le résultat de la question 3.
5. $P = \dfrac{2\,465}{4\,845} = \dfrac{29}{57} \approx 0{,}51$.
6. Un résultat est un 4-uplet d'ampoules distinctes : $20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$. Chaque prélèvement simultané correspond à $4! = 24$ résultats ordonnés : $4\,845 \times 24 = 116\,280$.

Une solution de BarroTech