Dérivation et convexité

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : rappels sur la dérivation

Exercice 1 : calculer des dérivées

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
4. $f_4(x) = \dfrac{4}{x} - \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f_3 au point d'abscisse 2.

Exercice 2 : le bénéfice d'un apiculteur

Une création de BarroTech

Un apiculteur vend son miel en pots. Pour x milliers de pots vendus, avec $0 \leq x \leq 8$, son bénéfice, en centaines d'euros, est

$$B(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x - 50.$$

1. Calculer $B(0)$ et interpréter ce résultat.
2. Calculer $B'(x)$, puis vérifier que $B'(x) = -6(x-5)(x+2)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;8]$ et dresser le tableau de variations de B.
4. Combien de pots l'apiculteur doit-il vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice, en euros ?
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de B au point d'abscisse 1.

Leçon 2 : composée de deux fonctions

Exercice 3 : composer et décomposer

1. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$.
   - **a.** Calculer $(v \circ u)(3)$ et $(u \circ v)(3)$.
   - **b.** Donner l'expression de $(v \circ u)(x)$ et de $(u \circ v)(x)$ pour tout réel x.
   - **c.** Résoudre l'équation $(v \circ u)(x) = (u \circ v)(x)$.
2. Écrire chaque fonction sous la forme $v \circ u$, en précisant les fonctions u et v.
   - **a.** $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}$
   - **b.** $x \mapsto (5 - x)^3$
   - **c.** $x \mapsto \sqrt{1 + \mathrm{e}^x}$
   - **d.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$
   - **e.** $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

Exercice 4 : ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

1. $f(x) = \sqrt{10 - 5x}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ *(indication : écrire $x^2 + 4x + 5$ sous forme canonique)*
4. $k(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
5. $m(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$
6. $p(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : dérivée d'une fonction composée

Exercice 5 : dériver des composées

1. Calculer la dérivée de chaque fonction, sur $\mathbb{R}$ sauf indication contraire.
   - **a.** $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^3$
   - **b.** $g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$
   - **c.** $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
   - **d.** $k(x) = \dfrac{1}{\left(x^2 + 3\right)^2}$
   - **e.** $m(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
   - **f.** $p(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
   - **g.** $q(x) = \left(\mathrm{e}^x + 1\right)^4$
2. Soit $r(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$. Déterminer une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 6 : un voilier et un phare

Un voilier navigue en ligne droite, à vitesse constante, au large d'une côte bretonne. Sa distance à un phare, en kilomètres, au bout de t heures, est

$$d(t) = \sqrt{t^2 - 6t + 25}, \qquad 0 \leq t \leq 6.$$

1. Calculer $d(0)$ et $d(6)$.
2. Montrer que, pour tout réel t, $t^2 - 6t + 25 = (t-3)^2 + 16$. En déduire que d est bien définie et dérivable sur $[0\,;6]$.
3. Montrer que $d'(t) = \dfrac{t-3}{\sqrt{t^2 - 6t + 25}}$.
4. Étudier les variations de d sur $[0\,;6]$. À quel moment le voilier est-il au plus près du phare ? À quelle distance ?
5. Calculer $d'(0)$ et interpréter ce nombre.

Leçon 4 : étude complète d'une fonction

Exercice 7 : une étude avec l'exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Vérifier que $f(x) = 2\,\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f. Donner la valeur exacte du maximum, puis une valeur approchée au millième.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Une solution de BarroTech

Exercice 8 : deux asymptotes horizontales

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $g(-x) = -g(x)$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
4. En déduire la limite de g en $-\infty$.
5. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
6. Dresser le tableau de variations de g et préciser les asymptotes de sa courbe.
7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

Leçon 5 : dérivée seconde et convexité

Exercice 9 : dérivées secondes

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour chaque fonction.
   - **a.** $f_1(x) = x^4 - 2x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$
   - **b.** $f_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$
   - **c.** $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
   - **d.** $f_4(x) = \left(x^2+1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$
   - **e.** $f_5(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$
2. Au départ d'une course, la distance parcourue par une cycliste, en mètres, au bout de t secondes, est $d(t) = 0{,}5\,t^2 + 2t$ pour $0 \le t \le 10$. Calculer $d'(t)$ et $d''(t)$, puis interpréter ces deux résultats. Quelle est la vitesse de la cycliste au bout de 10 secondes ?

Exercice 10 : la convexité par les sécantes

1. Soit $f(x) = x^2$. Déterminer une équation de la sécante passant par les points de la courbe d'abscisses 1 et 3, puis montrer que $x^2 \le 4x - 3$ pour tout x de $[1\,;3]$.
2. Un moulin produit de la farine. Le coût de production de q tonnes de farine, en centaines d'euros, est $C(q) = 2q^2 + 30q + 200$, pour $0 \le q \le 20$.
   - **a.** Calculer $C(2)$, $C(4)$ et $C(6)$.
   - **b.** Déterminer une équation de la sécante passant par les points de la courbe de C d'abscisses 2 et 6.
   - **c.** Montrer que $C(q) - (46q + 176) = 2(q-2)(q-6)$. En déduire la position de la courbe par rapport à cette sécante sur $[2\,;6]$.
   - **d.** Soient a et b deux réels tels que $0 \le a < b \le 20$. On admet que la sécante passant par les points d'abscisses a et b a pour équation $y = C(a) + \big(2(a+b)+30\big)(q-a)$. Montrer que $C(q) - \Big(C(a) + \big(2(a+b)+30\big)(q-a)\Big) = 2(q-a)(q-b)$, puis conclure sur la convexité de C.
   - **e.** Vérifier que $C(4) \le \dfrac{C(2)+C(6)}{2}$ et interpréter.

Une solution de BarroTech

Leçon 6 : convexité et dérivées

Exercice 11 : étudier la convexité

Étudier la convexité de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = (x - 3)\,\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ *(on admet que $f_4''(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$; vérifier d'abord $f_4'(x)$)*
5. $f_5(x) = \sqrt{x + 4}$ sur $]-4\,;+\infty[$

Exercice 12 : la démonstration du cours sur un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

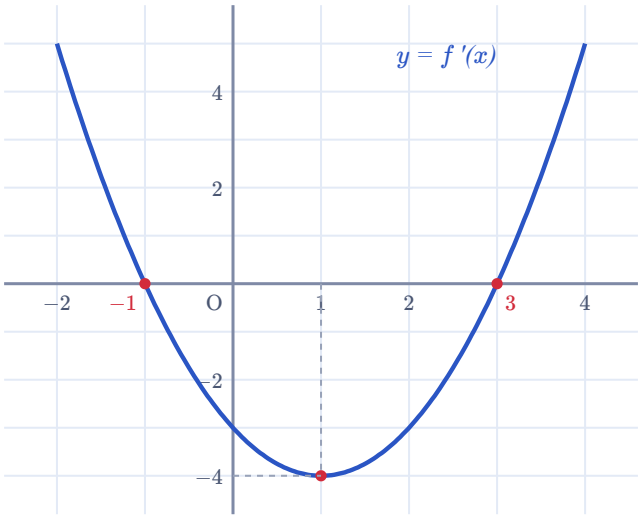
1. Calculer $f''(x)$. Que peut-on en déduire pour la convexité de f ?
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En suivant la démonstration du cours, on pose $g(x) = x^4 - 4x + 3$.
   - **a.** Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = 4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$.
   - **b.** Étudier le signe de $g'(x)$, puis dresser le tableau de variations de g.
   - **c.** En déduire la position de la courbe de f par rapport à T.
4. Vérifier que $g(x) = (x-1)^2\left(x^2 + 2x + 3\right)$, et retrouver le résultat de la question 3.c.
5. On a $f''(0) = 0$. Le point $O(0\,;0)$ est-il un point d'inflexion de la courbe de f ? Justifier.

Une solution de Barrolech

Leçon 7 : point d'inflexion

Exercice 13 : lire la convexité sur des graphiques et des tableaux

Partie A. On donne ci-dessous la courbe de la **dérivée** f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\,;4]$. La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3, et elle admet un minimum au point $(1\,;-4)$.



Courbe de la dérivée f ′ sur [−2 ; 4]

Une solution de BarroTech

1. Donner le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;4]$, puis en déduire les variations de f.
2. Donner les variations de f' sur $[-2\,;4]$, puis en déduire la convexité de f.
3. La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, quelle est son abscisse ?
4. Donner le signe de $f''(x)$ sur $[-2\,;4]$.

Partie B. Une fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Voici le tableau de signes de $g''(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Sur quels intervalles g est-elle convexe ? concave ?
2. Combien la courbe de g a-t-elle de points d'inflexion ? Donner leurs abscisses.
3. Sur quels intervalles la dérivée g' est-elle croissante ?

Partie C. Une fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$; sa dérivée h' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$, et $h(0)=0$. Esquisser l'allure de la courbe de h. Que se passe-t-il au point d'abscisse 0 ? Citer une fonction de référence qui convient.

Exercice 14 : le raccordement à la fibre optique

Dans une commune, le nombre de foyers raccordés à la fibre optique, t mois après le début des travaux, est modélisé par

$$N(t) = \frac{3000}{1 + \mathrm{e}^{4-t}}, \qquad 0 \leq t \leq 12.$$

1. Calculer $N(0)$ et $N(12)$, arrondis à l'unité. Déterminer la limite de $N(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter.
2. On pose $u(t) = 1 + \mathrm{e}^{4-t}$. Calculer $u'(t)$, puis montrer que $N'(t) = \dfrac{3000\,\mathrm{e}^{4-t}}{\left(1 + \mathrm{e}^{4-t}\right)^2}$. En déduire les variations de N.
3. On admet que $N''(t) = \dfrac{3000\,\mathrm{e}^{4-t}\left(\mathrm{e}^{4-t} - 1\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{4-t}\right)^3}$. Étudier le signe de $N''(t)$ sur $[0\,;12]$. En déduire la convexité de N et le point d'inflexion de sa courbe.
4. $N'(t)$ représente le nombre de nouveaux raccordements par mois. À quel moment ce nombre est-il maximal ? Calculer sa valeur maximale.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de N au point d'inflexion. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente sur $[0\,;4]$ et sur $[4\,;12]$.

Leçon 8 : démontrer des inégalités par la convexité

Exercice 15 : des inégalités avec des tangentes et des sécantes

Une solution de BarroTech

1. Montrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}\,x$ *(utiliser la tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse 1)*. En déduire que $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \mathrm{e}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$.
3. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \dfrac{x}{4} + 1$ *(utiliser la tangente au point d'abscisse 4)*. En déduire une valeur approchée par excès de $\sqrt{4{,}1}$, et la comparer à celle de la calculatrice.
4. Déterminer une équation de la sécante à la courbe de la fonction racine carrée passant par les points d'abscisses 1 et 4. En déduire que $\sqrt{x} \geq \dfrac{x+2}{3}$ pour tout x de $[1\,;4]$.
5. À l'aide des questions précédentes et de l'inégalité $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$ du cours, donner un encadrement de $\sqrt{2}$.

Exercice 16 : l'inégalité de Bernoulli par la convexité

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et f la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que f est convexe sur $[-1\,;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. *Comparer avec le chapitre 1 :* pour quelles valeurs de x l'inégalité de Bernoulli avait-elle été démontrée par récurrence ?
4. Un livret d'épargne rapporte $3\,\%$ d'intérêts par an, composés chaque année. Montrer, sans calculatrice, qu'un capital de 2000 euros placé pendant 10 ans atteint au moins 2600 euros. Calculer ensuite le capital obtenu, arrondi au centime.
5. Un vélo électrique acheté 1500 euros perd $12\,\%$ de sa valeur chaque année. Montrer qu'au bout de 5 ans, il vaut au moins 600 euros. Comparer avec sa valeur réelle, arrondie à l'euro.

Une solution de BarroTech