Dérivation et convexité

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. $f_1'(x) = 12x^3 - 4x + 5$.
2. *Produit $u\,v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.* $f_2'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^x = x(x+2)\,\mathrm{e}^x$.
3. *Quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = x - 1$.* $f_3'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x+3)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$.
4. $f_4'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. *Forme $g(ax+b)$ avec $g = \exp$, $a = -3$.* $f_5'(x) = -3\,\mathrm{e}^{-3x+1}$.
6. *Produit.* $f_6'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$).
7. $f_3(2) = \dfrac{7}{1} = 7$ et $f_3'(2) = \dfrac{-5}{1} = -5$. La tangente a pour équation $y = 7 - 5(x-2)$, soit $y = -5x + 17$.

Exercice 2

Une solution de BarroTech

1. $B(0) = -50$: sans aucun pot vendu, l'apiculteur perd 50 centaines d'euros, soit 5000 euros. Ce sont ses frais fixes (ruches, matériel, pots).
2. $B'(x) = -6x^2 + 18x + 60$. Et $-6(x-5)(x+2) = -6\left(x^2 - 3x - 10\right) = -6x^2 + 18x + 60$: c'est bien $B'(x)$.
3. Sur $[0\,;8]$, $x + 2 > 0$ et $-6 < 0$, donc $B'(x)$ a le signe de $-(x-5)$: positif sur $[0\,;5[$, négatif sur $]5\,;8]$. Avec $B(5) = -250 + 225 + 300 - 50 = 225$ et $B(8) = -1024 + 576 + 480 - 50 = -18$:

x	0		5		8
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	-50	croissante	225	décroissante	-18

4. Le bénéfice est maximal pour $x = 5$, c'est-à-dire 5000 **pots**. Il vaut 225 centaines d'euros, soit $22\,500$ **euros**.
5. $B(1) = -2 + 9 + 60 - 50 = 17$ et $B'(1) = -6 + 18 + 60 = 72$. La tangente a pour équation $y = 17 + 72(x-1)$, soit $y = 72x - 55$.

Exercice 3

1. Les fonctions $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$.
   - **a.** $(v \circ u)(3) = v\big(u(3)\big) = v(5) = 25$; $\quad (u \circ v)(3) = u\big(v(3)\big) = u(9) = 17$.
   - **b.** $(v \circ u)(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$; $\quad (u \circ v)(x) = 2x^2 - 1$.
   - **c.** $4x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 1 \iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff 2(x-1)^2 = 0 \iff x = 1$. **Une seule solution :** $x = 1$ (les deux composées y valent 1). Les deux fonctions ne sont donc pas égales.
2. *On cherche la dernière opération effectuée : c'est la fonction v.*
   - **a.** $u(x) = x^2 + 1$ et $v(X) = \mathrm{e}^X$.
   - **b.** $u(x) = 5 - x$ et $v(X) = X^3$.
   - **c.** $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$ et $v(X) = \sqrt{X}$.
   - **d.** $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(X) = \dfrac{1}{X}$.
   - **e.** $u(x) = \sqrt{x}$ (définie sur $[0\,;+\infty[$) et $v(X) = \mathrm{e}^X$.

Exercice 4

1. $10 - 5x \geq 0 \iff x \leq 2$: $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;2]$.
2. $x^2 - 9 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -3$: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\}$.
3. $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.
4. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \geq 0 \iff x \leq -2$ ou $x \geq 2$ (signe d'un trinôme, positif à l'extérieur des racines) : $\mathcal{D}_k =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.
5. $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \iff x = 0$ (la fonction exponentielle est strictement croissante) : $\mathcal{D}_m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. $\dfrac{1}{x-2}$ existe si et seulement si $x \neq 2$, et l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_p = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Une solution de BarryTech

Exercice 5

1. *On repère l'intérieur u, on calcule u', puis on applique la formule.*
   - **a.** $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $f'(x) = 3 \times 2x \times \left(x^2+1\right)^2 = 6x\left(x^2+1\right)^2$.
   - **b.** $u(x) = x^2 - 2x$, $u'(x) = 2x - 2$: $g'(x) = (2x-2)\,\mathrm{e}^{x^2-2x}$.
   - **c.** $u(x) = 2x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 4x$: $h'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.
   - **d.** $k(x) = \left(x^2+3\right)^{-2}$: $k'(x) = -2 \times 2x \times \left(x^2+3\right)^{-3} = -\dfrac{4x}{\left(x^2+3\right)^3}$.
   - **e.** $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: $m'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
   - **f.** Produit de x et de e^{-x^2}, dont la dérivée est $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$: $p'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x \times \left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.
   - **g.** $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$: $q'(x) = 4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3$.
2. $r(1) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $r'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$, donc $r'(1) = 2$. La tangente a pour équation $y = 1 + 2(x-1)$, soit $y = 2x - 1$.

Exercice 6

1. $d(0) = \sqrt{25} = 5$ et $d(6) = \sqrt{36 - 36 + 25} = 5$: au début et à la fin, le voilier est à 5 km du phare.
2. $(t-3)^2 + 16 = t^2 - 6t + 9 + 16 = t^2 - 6t + 25$. Donc $t^2 - 6t + 25 \geq 16 > 0$ pour tout réel t : la racine carrée est définie, et, l'intérieur étant strictement positif, d est dérivable sur $[0\,;6]$.
3. *Formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2 - 6t + 25$ et $u'(t) = 2t - 6$.* $d'(t) = \dfrac{2t-6}{2\sqrt{t^2-6t+25}} = \dfrac{t-3}{\sqrt{t^2-6t+25}}$.
4. Le dénominateur est strictement positif : $d'(t)$ a le signe de $t - 3$. Donc d est décroissante sur $[0\,;3]$ et croissante sur $[3\,;6]$. Le minimum est $d(3) = \sqrt{16} = 4$. **Le voilier est au plus près du phare au bout de 3 heures, à 4 km.**
5. $d'(0) = \dfrac{-3}{\sqrt{25}} = -\dfrac{3}{5} = -0{,}6$. Au départ, la distance au phare diminue à la vitesse de $0{,}6$ km par heure : le voilier se rapproche du phare.

Une solution de Barrotech

Exercice 7

1. En $-\infty$: $2x+1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ (composition : $-x \to +\infty$). Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = 2\,\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}$. Par croissance comparée (chapitre 4), $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} \to 0$ en $+\infty$, et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.
3. *Produit $u\,v$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.* $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
4. $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1-2x$: positif si $x < \frac{1}{2}$, négatif si $x > \frac{1}{2}$. Le maximum vaut $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-1/2} \approx 1{,}213$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	croissante	$2\,\mathrm{e}^{-1/2}$	décroissante	0

5. $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, donc $f(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$. Et $f(x)$ a le signe de $2x+1$: **$f(x) < 0$ si $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ si $x > -\frac{1}{2}$.**
6. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$: la tangente a pour équation $y = x+1$.

Exercice 8

Une solution de BarroTech

1. Pour tout réel x, $x^2+1 \geq 1 > 0$: la racine carrée est définie, ne s'annule pas, et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul).
2. $g(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -g(x)$.
3. Pour $x > 0$: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ (car $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$). Donc $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$. Quand $x \to +\infty$, $1+\frac{1}{x^2} \to 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.
4. Comme $g(x) = -g(-x)$ et que $-x \to +\infty$ quand $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.
5. *Quotient avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$, $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.*

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

6. $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de -1 (limite en $-\infty$) à 1 (limite en $+\infty$), avec $g(0) = 0$. La courbe admet deux asymptotes horizontales : **$y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$+$	
g	-1	croissante	0	croissante	1

7. $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$: la tangente a pour équation $y = x$.

Exercice 9

1. Dérivées premières et secondes.
   - **a.** $f_1'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$; $\quad f_1''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.
   - **b.** $f_2'(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x} = (1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$; $\quad f_2''(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + (1+2x) \times 2\,\mathrm{e}^{2x} = 4(x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$.
   - **c.** $f_3'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\quad f_3''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
   - **d.** $f_4'(x) = 3 \times 2x \times \left(x^2+1\right)^2 = 6x\left(x^2+1\right)^2$; puis, par produit, $f_4''(x) = 6\left(x^2+1\right)^2 + 6x \times 2 \times 2x\left(x^2+1\right) = 6\left(x^2+1\right)\left(x^2+1+4x^2\right) = 6\left(x^2+1\right)\left(5x^2+1\right)$.
   - **e.** $f_5'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$; $\quad f_5''(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + (-x)(-x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
2. $d'(t) = t + 2$: c'est la **vitesse** de la cycliste, en mètres par seconde. $d''(t) = 1$: c'est son **accélération**, constante, de 1 mètre par seconde, chaque seconde. Au bout de 10 secondes, sa vitesse est $d'(10) = 12$ m/s (soit $43{,}2$ km/h).

Exercice 10

1. $f(1) = 1$ et $f(3) = 9$: la sécante a pour pente $\dfrac{9-1}{3-1} = 4$ et pour équation $y = 1 + 4(x-1) = 4x - 3$. Et $x^2 - (4x-3) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, qui est négatif ou nul pour $1 \leq x \leq 3$. Donc $x^2 \leq 4x - 3$ sur $[1\,;3]$.
2. Le coût de production $C(q) = 2q^2 + 30q + 200$.
   - **a.** $C(2) = 8 + 60 + 200 = 268$; $C(4) = 32 + 120 + 200 = 352$; $C(6) = 72 + 180 + 200 = 452$.
   - **b.** Pente : $\dfrac{452 - 268}{6 - 2} = \dfrac{184}{4} = 46$. Équation : $y = 268 + 46(q-2)$, soit $y = 46q + 176$.
   - **c.** $C(q) - (46q + 176) = 2q^2 - 16q + 24 = 2\left(q^2 - 8q + 12\right) = 2(q-2)(q-6)$. Pour $2 \leq q \leq 6$, $q - 2 \geq 0$ et $q - 6 \leq 0$: l'écart est négatif ou nul. **La courbe est sous la sécante sur $[2\,;6]$.**
   - **d.** $C(q) - C(a) = 2\left(q^2 - a^2\right) + 30(q-a) = (q-a)\big(2(q+a) + 30\big)$. Donc l'écart vaut $(q-a)\big(2(q+a) + 30 - 2(a+b) - 30\big) = (q-a) \times 2(q-b) = 2(q-a)(q-b)$. Pour $a \leq q \leq b$, il est négatif ou nul : la courbe est sous chacune de ses sécantes, C **est convexe sur $[0\,;20]$.**
   - **e.** $\dfrac{C(2) + C(6)}{2} = \dfrac{268 + 452}{2} = 360$ et $C(4) = 352 \leq 360$. *Interprétation :* produire 4 tonnes coûte moins cher que la moyenne des coûts de 2 et de 6 tonnes. Avec un coût convexe, chaque tonne supplémentaire coûte de plus en plus cher.

Exercice 11

On calcule f'' et on étudie son signe : convexe là où $f'' \geq 0$, concave là où $f'' \leq 0$.

1. $f_1'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f_1''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$. f_1 **est concave sur** $]-\infty\,;2]$ **et convexe sur** $[2\,;+\infty[$**.**
2. $f_2'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2x$ et $f_2''(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2 > 0$. f_2 **est convexe sur** $\mathbb{R}$**.**
3. $f_3'(x) = \mathrm{e}^x + (x-3)\,\mathrm{e}^x = (x-2)\,\mathrm{e}^x$ et $f_3''(x) = \mathrm{e}^x + (x-2)\,\mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$, du signe de $x-1$. f_3 **est concave sur** $]-\infty\,;1]$ **et convexe sur** $[1\,;+\infty[$**.**
4. $f_4'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ (règle $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$). Comme $(x^2+1)^3 > 0$, $f_4''(x)$ a le signe de $6x^2 - 2 = 6\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$, qui s'annule en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0{,}577$. f_4 **est convexe sur** $\left]-\infty\,;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ **et sur** $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$**, concave sur** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$**.**
5. $f_5'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ et $f_5''(x) = -\dfrac{1}{4(x+4)\sqrt{x+4}} < 0$. f_5 **est concave sur** $]-4\,;+\infty[$**.**

Exercice 12

1. $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2 \geq 0$: f **est convexe sur** $\mathbb{R}$, et sa courbe est au-dessus de ses tangentes.
2. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4$: T a pour équation $y = 1 + 4(x-1)$, soit $y = 4x - 3$.
3. L'écart entre la courbe et T est $g(x) = x^4 - (4x-3) = x^4 - 4x + 3$.
   - **a.** $g'(x) = 4x^3 - 4 = 4\left(x^3 - 1\right)$, et $4(x-1)\left(x^2+x+1\right) = 4\left(x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1\right) = 4\left(x^3 - 1\right)$.
   - **b.** Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$: il est toujours strictement positif. Donc $g'(x)$ a le signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		décroissante	0	croissante	

- **c.** Le minimum de g est $g(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout réel x : **la courbe de** f **est au-dessus de** T, et $x^4 \geq 4x - 3$.

4. $(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 3\right) = x^4 - 4x + 3$ (développer). Le trinôme $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ est strictement positif et $(x-1)^2 \geq 0$: on retrouve $g(x) \geq 0$.
5. **Non.** $f''(0) = 0$, mais f'' ne change pas de signe ($f''(x) = 12x^2 \geq 0$) : f est convexe sur tout $\mathbb{R}$, et sa courbe reste au-dessus de sa tangente en O (l'axe des abscisses, car $x^4 \geq 0$). Elle ne la traverse pas : O n'est pas un point d'inflexion.

Exercice 13

Partie A.

1. $f'(x) \geq 0$ sur $[-2\,;-1]$ et sur $[3\,;4]$, $f'(x) \leq 0$ sur $[-1\,;3]$. Donc f **est croissante sur** $[-2\,;-1]$**, décroissante sur** $[-1\,;3]$**, croissante sur** $[3\,;4]$**.**
2. f' est décroissante sur $[-2\,;1]$ et croissante sur $[1\,;4]$ (minimum en 1). Donc f **est concave sur** $[-2\,;1]$ **et convexe sur** $[1\,;4]$**.**
3. La convexité change en 1 : **la courbe de** f **a un point d'inflexion d'abscisse** 1. *C'est l'abscisse de l'extremum de f', pas celle d'un zéro de f'.*
4. f'' est la dérivée de f' : $f''(x) \leq 0$ **sur** $[-2\,;1]$ **et** $f''(x) \geq 0$ **sur** $[1\,;4]$**.**

Pour information, la courbe tracée est celle de $x \mapsto x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, de minimum -4 en 1.

Partie B.

1. g **est convexe sur** $]-\infty\,;-1]$ **et sur** $[2\,;+\infty[$**, concave sur** $[-1\,;2]$**.**
2. g'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 2 : **deux points d'inflexion, d'abscisses** -1 **et** 2**.**
3. g' est croissante là où $g'' \geq 0$: **sur** $]-\infty\,;-1]$ **et sur** $[2\,;+\infty[$**.**

Partie C. h est croissante, concave sur $]-\infty\,;0]$ (h' décroissante) puis convexe sur $[0\,;+\infty[$ (h' croissante). La courbe monte toujours : de moins en moins vite jusqu'à l'origine, puis de plus en plus vite. **Le point** $O(0\,;0)$ **est un point d'inflexion**, où la pente est la plus faible. La fonction cube $x \mapsto x^3$ convient : elle est croissante, $h'(x) = 3x^2$ est décroissante puis croissante, et $h(0) = 0$.

Exercice 14

1. $N(0) = \dfrac{3000}{1+\mathrm{e}^{4}} \approx 54$ foyers et $N(12) = \dfrac{3000}{1+\mathrm{e}^{-8}} \approx 2999$ foyers. Quand $t \to +\infty$, $4-t \to -\infty$ donc $\mathrm{e}^{4-t} \to 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 3000$: à long terme, le nombre de foyers raccordés se stabilise vers 3000 (sans jamais l'atteindre).
2. $u'(t) = -\mathrm{e}^{4-t}$ (règle $g(at+b)$, avec $a=-1$). Comme $N = \dfrac{3000}{u} = 3000 \times \dfrac{1}{u}$:
$$N'(t) = 3000 \times \left(-\frac{u'(t)}{u(t)^2}\right) = \frac{3000\,\mathrm{e}^{4-t}}{(1+\mathrm{e}^{4-t})^2}.$$
Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : N **est strictement croissante sur** $[0\,;12]$.
3. Le dénominateur et $3000\,\mathrm{e}^{4-t}$ sont strictement positifs : $N''(t)$ a le signe de $\mathrm{e}^{4-t}-1$. Or $\mathrm{e}^{4-t} > 1 = \mathrm{e}^{0} \iff 4-t>0 \iff t<4$ (l'exponentielle est strictement croissante). N **est convexe sur** $[0\,;4]$ **et concave sur** $[4\,;12]$; N'' s'annule en 4 en changeant de signe : le point $(4\,;N(4))$, avec $N(4) = \dfrac{3000}{1+1} = 1500$, est le **point d'inflexion**.
4. $N'' \geq 0$ sur $[0\,;4]$ et $N'' \leq 0$ sur $[4\,;12]$: N' est croissante puis décroissante, donc **maximale pour** $t=4$, au bout de 4 mois. $N'(4) = \dfrac{3000\times 1}{(1+1)^2} = 750$: 750 **nouveaux raccordements par mois** au plus fort des travaux.
5. La tangente au point $(4\,;1500)$ a pour équation $y = 1500 + 750(t-4)$, soit $y = 750t - 1500$. Sur $[0\,;4]$, N est convexe : la courbe est **au-dessus** de cette tangente. Sur $[4\,;12]$, N est concave : la courbe est **en dessous**. Elle traverse sa tangente au point d'inflexion.

Une solution de BarroTech

Exercice 15

1. L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ ($(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x > 0$). Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = \mathrm{e}\,x$. La courbe est au-dessus : $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}\,x$ **pour tout réel** x**.** Pour $x>0$, en divisant par $x>0$: $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \mathrm{e}$.
2. Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$: $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$; f est convexe. Sa tangente en 0 : $y = 1 - 1\times(x-0) = 1-x$. Donc $\mathrm{e}^{-x} \geq 1-x$ **pour tout réel** x**.**
3. La racine carrée est concave sur $]0\,;+\infty[$. En 4 : $\sqrt{4}=2$ et la dérivée vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4) = \dfrac{x}{4}+1$, et la courbe est en dessous : $\sqrt{x} \leq \dfrac{x}{4}+1$ pour $x>0$ (et aussi pour $x=0$). Pour $x=4{,}1$: $\sqrt{4{,}1} \leq 2{,}025$. La calculatrice donne $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}0248$: l'approximation est excellente, car $4{,}1$ est proche de 4.
4. Points $(1\,;1)$ et $(4\,;2)$: pente $\dfrac{2-1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$, équation $y = 1 + \dfrac{1}{3}(x-1) = \dfrac{x+2}{3}$. La fonction racine carrée est concave : sur $[1\,;4]$, sa courbe est **au-dessus** de la sécante, donc $\sqrt{x} \geq \dfrac{x+2}{3}$.
5. Pour $x=2$: la question 4 donne $\sqrt{2} \geq \dfrac{4}{3}$, et le cours donne $\sqrt{2} \leq \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Donc $\dfrac{4}{3} \leq \sqrt{2} \leq \dfrac{3}{2}$, soit $1{,}333\ldots \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$ (la calculatrice donne $\sqrt{2} \approx 1{,}414$).

Exercice 16

1. $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. Sur $[-1\,;+\infty[$, $1+x \geq 0$ donc $(1+x)^{n-2} \geq 0$; et $n(n-1) > 0$. Donc $f'' \geq 0$: f **est convexe sur** $[-1\,;+\infty[$**.**
2. $f(0) = 1$ et $f'(0) = n$: la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + nx$. Comme f est convexe, sa courbe est au-dessus de cette tangente : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **pour tout** $x \geq -1$**.**
3. Au chapitre 1, l'inégalité $(1+a)^n \geq 1 + na$ a été démontrée par récurrence pour a réel strictement positif. La convexité la donne pour tout $x \geq -1$, donc aussi pour des valeurs négatives (baisse en pourcentage).
4. Au bout de 10 ans, le capital vaut $2000 \times 1{,}03^{10}$ euros. Avec $x = 0{,}03$ et $n = 10$: $1{,}03^{10} \geq 1 + 10 \times 0{,}03 = 1{,}3$, donc le capital vaut au moins $2000 \times 1{,}3 = 2600$ euros. En réalité, $2000 \times 1{,}03^{10} \approx 2687{,}83$ euros.
5. Perdre $12\,\%$ revient à multiplier par $1 - 0{,}12 = 0{,}88$. Au bout de 5 ans, le vélo vaut $1500 \times 0{,}88^5$ euros. Avec $x = -0{,}12 \geq -1$ et $n = 5$: $0{,}88^5 \geq 1 - 5 \times 0{,}12 = 0{,}4$, donc il vaut au moins $1500 \times 0{,}4 = 600$ euros. En réalité, $1500 \times 0{,}88^5 \approx 792$ euros : la minoration est juste, mais grossière.

Une solution de BarroTech