Limites de fonctions

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : limite finie en l'infini, asymptote horizontale

Exercice 1 : le coût moyen d'un programme de théâtre

Une troupe de théâtre amateur fait imprimer les programmes de son spectacle. L'imprimeur facture 120 euros de frais de mise en page, puis $0{,}60$ euro par programme. Pour x programmes ($x > 0$), le coût est $C(x) = 0{,}6x + 120$ euros, et le coût moyen d'un programme est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $M(x) = 0{,}6 + \dfrac{120}{x}$. Calculer $M(100)$ et $M(1\,000)$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $M(x) > 0{,}6$.
3. Déterminer le plus petit nombre entier de programmes pour lequel le coût moyen est inférieur à $0{,}65$ euro.
4. Soit r un réel strictement positif. Montrer que $M(x) \in]0{,}6 - r\,;0{,}6 + r[$ dès que $x > \dfrac{120}{r}$.
5. En déduire la limite de M en $+\infty$. Que peut-on dire de la droite d'équation $y = 0{,}6$? Préciser la position de la courbe de M par rapport à cette droite.
6. Interpréter le résultat pour la troupe.

Exercice 2 : une limite en moins l'infini, vrai ou faux

On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[$ par $g(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$.

1. Calculer $g(-10)$, $g(-100)$ et $g(-1\,000)$.
2. Montrer que, pour tout $x < 0$, $g(x) < 3$.
3. Déterminer les réels $x < 0$ tels que $g(x) > 2{,}99$.
4. Soit $r > 0$. Montrer que $g(x) \in]3 - r\,;3 + r[$ dès que $x < -\dfrac{2}{r}$. Conclure sur la limite de g en $-\infty$, l'asymptote, et la position de la courbe.
5. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$, alors $f(x) < 5$ pour x assez grand.
   - **b.** Si la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   - **c.** Une fonction strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Leçon 2 : limites infinies, asymptote verticale

Exercice 3 : utiliser les définitions

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$.
   - **a.** Déterminer les réels $x \geq 1$ tels que $f(x) \geq 100$.
   - **b.** Soit $A>0$. Montrer que $f(x) \geq A$ dès que $x \geq A^2+1$. Conclure.
2. Soit g la fonction définie pour $x \neq 2$ par $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.
   - **a.** Montrer que $g(x) \geq 10\,000$ si et seulement si $1{,}99 \leq x \leq 2{,}01$ et $x \neq 2$.
   - **b.** Soit $A>0$. Montrer que $g(x) \geq A$ dès que $0<|x-2| \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.
   - **c.** En déduire $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ et une asymptote à la courbe de g.
3. La phrase « f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ » s'écrit : « pour tout réel A, il existe un réel B tel que, pour tout $x>B$, $f(x) \geq A$ ».
   - **a.** Écrire sa négation.
   - **b.** En déduire que la fonction cosinus n'a pas pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4 : le coût de la dépollution

Une commune veut dépolluer un étang. Le coût, en milliers d'euros, pour éliminer $p\,\%$ des polluants est $C(p)=\dfrac{20p}{100-p}$, pour $0 \leq p<100$.

Une solution de BarroTech

1. Calculer $C(50)$, $C(90)$ et $C(99)$.
2. Montrer que, pour tout $p \in [0\,;100[$, $C(p)=-20+\dfrac{2\,000}{100-p}$.
3. Soit $A>0$. Montrer que $C(p) \geq A$ si et seulement si $p \geq 100-\dfrac{2\,000}{A+20}$. En déduire $\lim\limits_{p \to 100^-} C(p)$. Que peut-on dire de la droite d'équation $p=100$? Interpréter.
4. À partir de quel pourcentage de polluants éliminés le coût dépasse-t-il un million d'euros ? Donner la valeur arrondie au centième.
5. Lecture graphique.
   - **a.** Une fonction f, définie pour $x \neq -1$, vérifie : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)=-\infty$. Donner les asymptotes à sa courbe et tracer une allure possible de celle-ci.
   - **b.** La courbe d'une fonction h, définie pour $x \neq 4$, admet la droite d'équation $x=4$ pour asymptote verticale, la courbe montant vers le haut des deux côtés de cette droite, et l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$. Traduire ces informations par des limites.

Leçon 3 : limites des fonctions de référence

Exercice 5 : limites de référence

1. Donner, sans justification, chacune des limites suivantes.
   - **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^6}$ **e.** $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^3}$
   - **f.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3}$ **g.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^4}$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **i.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **j.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$
2. Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to2} x^3$; $\lim\limits_{x\to9} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{e}^x$.
3. Donner les asymptotes à la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, puis à celle de la fonction exponentielle.

Exercice 6 : la démonstration sur l'exponentielle, en chiffres

1. À la calculatrice, donner une valeur approchée de e^{10} (à l'unité) et de e^{-5} (à 10^{-4} près).
2. Déterminer le plus petit entier N tel que $\mathrm{e}^N \geq 10^6$. En déduire que $\mathrm{e}^x \geq 10^6$ pour tout réel $x \geq N$. Quelle propriété de la fonction exponentielle utilise-t-on ?
3. Déterminer le plus petit entier N tel que $\mathrm{e}^{-N} < 0{,}001$. En déduire que, pour tout réel $x \leq -N$, $0 < \mathrm{e}^x < 0{,}001$.
4. Rédiger la démonstration du cours : en utilisant la suite (e^n), démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : opérations sur les limites

Exercice 7 : calculer des limites

Déterminer chaque limite, en justifiant.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 4x^2 + 1\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 4x^2 + 1\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3x^4 + x^3 + 2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 4}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + 5}{x^2 + 1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - 2x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$
8. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Exercice 8 : asymptotes d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite de -1. En déduire une asymptote.
3. Montrer que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x+1}$. Étudier la position de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = 3$.
4. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f, complété par les limites.
5. Retour à l'exercice 4 : retrouver $\lim\limits_{p \to 100^-} \dfrac{20p}{100 - p}$ avec les opérations sur les limites.

Leçon 5 : composition des limites

Exercice 9 : limites de fonctions composées

Déterminer chaque limite, en justifiant.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-3x+1}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{9x - 1}{x + 5}}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-x}{x+2}}$
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x}$
7. Limites des suites définies pour $n \geq 0$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{4n^2 + 1}{n^2 + 3}}$ et $v_n = \mathrm{e}^{-n^2}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 10 : la vitesse d'un parachutiste

Pendant la chute libre d'un parachutiste, avant l'ouverture du parachute, sa vitesse en mètres par seconde au bout de t secondes est modélisée par $v(t) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$, pour $t \geq 0$.

1. Calculer $v(0)$, puis des valeurs approchées au dixième de $v(5)$ et $v(20)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Interpréter : on parle de vitesse limite. Convertir cette vitesse en kilomètres par heure.
3. Montrer que $v(t) < 50$ pour tout $t \geq 0$.
4. Calculer $v'(t)$ et en déduire le sens de variation de v.
5. À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer le plus petit entier t tel que $v(t) \geq 49$.
6. Quelle est la limite de la suite des vitesses relevées chaque seconde, $w_n = v(n)$?

Leçon 6 : limites et comparaison

Exercice 11 : comparaison et gendarmes

Déterminer chaque limite, en justifiant.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\sin x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-\cos x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\sin x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\cos x$

Exercice 12 : des inégalités avec l'exponentielle

On rappelle que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq x+1$.

1. Soit k la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $k(x)=\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$.
   - **a.** Calculer $k'(x)$ et justifier que $k'(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$.
   - **b.** En déduire que, pour tout $x\geq 0$, $\mathrm{e}^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.
2. En déduire que, pour tout $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\geq\dfrac{x}{2}$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
3. En appliquant l'inégalité rappelée au réel $-x$, montrer que $\mathrm{e}^{-x}\geq 1-x$ pour tout réel x. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}$.

Leçon 7 : croissance comparée

Exercice 13 : l'exponentielle l'emporte

Une solution de BarroTech

Déterminer chaque limite, en justifiant.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\,\mathrm{e}^x$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\mathrm{e}^x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x-x}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$
8. Limites des suites définies par $u_n=n^5\,\mathrm{e}^{-n}$ et $v_n=\mathrm{e}^n-n^2$.

Exercice 14 : étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}+2\,\mathrm{e}^{-x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$ et une asymptote à la courbe de f.
3. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

4. Dresser le tableau de variations de f, complété par les limites. Donner la valeur exacte du maximum.
5. Étudier le signe de $f(x)$. Pour quelles valeurs de x la courbe de f est-elle au-dessus de son asymptote ?

Une solution de BarroTech