Limites de fonctions

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. $M(x) = \dfrac{0{,}6x + 120}{x} = \dfrac{0{,}6x}{x} + \dfrac{120}{x} = 0{,}6 + \dfrac{120}{x}$. $M(100) = 0{,}6 + 1{,}2 = 1{,}8$ euro et $M(1\,000) = 0{,}6 + 0{,}12 = 0{,}72$ euro.
2. Pour $x > 0$, $\dfrac{120}{x} > 0$, donc $M(x) > 0{,}6$.
3. $M(x) < 0{,}65 \iff \dfrac{120}{x} < 0{,}05 \iff x > \dfrac{120}{0{,}05} = 2\,400$ (car $x > 0$). **Il faut au moins $2\,401$ programmes.** Contrôle : $M(2\,400) = 0{,}65$ exactement, qui n'est pas strictement inférieur à $0{,}65$.
4. On sait déjà que $M(x) > 0{,}6 > 0{,}6 - r$. Et $M(x) < 0{,}6 + r \iff \dfrac{120}{x} < r \iff x > \dfrac{120}{r}$. Donc, dès que $x > \dfrac{120}{r}$, $M(x) \in]0{,}6 - r\,;0{,}6 + r[$.
5. *Tout intervalle ouvert contenant $0{,}6$ contient un intervalle $]0{,}6 - r\,;0{,}6 + r[$ avec $r > 0$.* D'après la question 4, il contient toutes les valeurs $M(x)$ pour x assez grand : $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x) = 0{,}6$. La droite d'équation $y = 0{,}6$ est **asymptote horizontale** à la courbe de M en $+\infty$. Comme $M(x) - 0{,}6 = \dfrac{120}{x} > 0$, la courbe est **au-dessus** de cette asymptote.
6. Plus la troupe fait imprimer de programmes, plus le coût moyen d'un programme se rapproche de $0{,}60$ euro, le prix unitaire : les frais de mise en page se répartissent sur un grand nombre d'exemplaires. Le coût moyen reste toujours supérieur à $0{,}60$ euro.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. $g(-10) = 3 - 0{,}2 = 2{,}8$; $g(-100) = 3 - 0{,}02 = 2{,}98$; $g(-1\,000) = 3 - 0{,}002 = 2{,}998$.
2. Pour $x < 0$, $\dfrac{2}{x} < 0$, donc $g(x) < 3$.
3. $g(x) > 2{,}99 \iff \dfrac{2}{x} > -0{,}01$. *On multiplie par $x < 0$: le sens de l'inégalité change.* $\iff 2 < -0{,}01x \iff x < -200$. **Les réels cherchés sont ceux de $]-\infty\,;-200[$.**
4. On a $g(x) < 3 < 3 + r$. Et $g(x) > 3 - r \iff \dfrac{2}{x} > -r \iff 2 < -rx \iff x < -\dfrac{2}{r}$ (en multipliant par $x < 0$). Donc, dès que $x < -\dfrac{2}{r}$, $g(x) \in]3 - r\,;3 + r[$. Tout intervalle ouvert contenant 3 contient donc les valeurs $g(x)$ dès que x est inférieur à un certain réel : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3$. La droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $-\infty$, et la courbe est **au-dessous** de cette droite (question 2).

5. Vrai ou faux :

- **a. Faux.** $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x}$ (pour $x > 0$) a pour limite 5 en $+\infty$, mais $f(x) > 5$ pour tout $x > 0$.
- **b. Vrai.** C'est le lien entre asymptote horizontale et limite : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ exactement quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
- **c. Faux.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, mais sa limite en $+\infty$ vaut 1.

Exercice 3

1. La fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- **a.** Pour $x \geq 1$, les deux membres étant positifs : $\sqrt{x-1} \geq 100 \iff x - 1 \geq 10\,000 \iff x \geq 10\,001$.
- **b.** Si $x \geq A^2 + 1$, alors $x - 1 \geq A^2$, et la racine carrée étant croissante, $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{A^2} = A$ (car $A > 0$). Tout intervalle $[A\,;+\infty[$ (avec $A > 0$, et donc aussi avec $A \leq 0$) contient les valeurs $f(x)$ pour x assez grand : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$.

2. La fonction $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

- **a.** Pour $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$, donc $g(x) \geq 10\,000 \iff (x-2)^2 \leq 0{,}0001 \iff |x-2| \leq 0{,}01 \iff 1{,}99 \leq x \leq 2{,}01$, avec $x \neq 2$.
- **b.** Si $0 < |x-2| \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, alors $0 < (x-2)^2 \leq \dfrac{1}{A}$, donc $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} \geq A$.
- **c.** Tout intervalle $[A\,;+\infty[$ contient les valeurs $g(x)$ pour x assez proche de 2 : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est **asymptote verticale** à la courbe de g.

3. *On échange « pour tout » et « il existe », et on nie la dernière inégalité.*

- **a.** « Il existe un réel A tel que, pour tout réel B, il existe un réel $x > B$ avec $f(x) < A$. »
- **b.** Avec $A = 2$: pour tout réel B, n'importe quel $x > B$ (par exemple $x = B + 1$) vérifie $\cos x \leq 1 < 2$. La négation est vraie : la fonction cosinus n'a pas pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4

1. $C(50) = \dfrac{1\,000}{50} = 20$; $C(90) = \dfrac{1\,800}{10} = 180$; $C(99) = \dfrac{1\,980}{1} = 1\,980$ (en milliers d'euros).

2. $-20 + \dfrac{2\,000}{100-p} = \dfrac{-20(100-p) + 2\,000}{100-p} = \dfrac{-2\,000 + 20p + 2\,000}{100-p} = \dfrac{20p}{100-p} = C(p)$.

3. Pour $p \in [0\,;100[$, $100 - p > 0$, et $A + 20 > 0$:

$$C(p) \geq A \iff \frac{2\,000}{100-p} \geq A + 20 \iff 100 - p \leq \frac{2\,000}{A+20} \iff p \geq 100 - \frac{2\,000}{A+20}.$$

Ainsi, tout intervalle $[A\,;+\infty[$ contient les valeurs $C(p)$ pour p assez proche de 100 (à gauche). $\lim\limits_{p \to 100^-} C(p) = +\infty$: la droite d'équation $p = 100$ est asymptote verticale. *Interprétation* : plus on s'approche d'une dépollution totale, plus le coût explose ; éliminer $100\,\%$ des polluants est hors d'atteinte.

4. Un million d'euros correspond à $A = 1\,000$ (milliers d'euros) : $C(p) \geq 1\,000 \iff p \geq 100 - \dfrac{2\,000}{1\,020} \approx 98{,}04$. **Le coût dépasse un million d'euros à partir d'environ $98{,}04\,\%$ de polluants éliminés.**

5. Lecture graphique.
   - **a.** La droite $x = -1$ est asymptote verticale ; la droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$. Allure possible : à gauche de -1, la courbe part de la droite $y = 2$ (en $-\infty$) et monte vers $+\infty$ le long de $x = -1$; à droite de -1, elle part de $-\infty$ le long de $x = -1$ et remonte vers la droite $y = 2$. (Par exemple, $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ convient.)
   - **b.** $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} h(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = +\infty$; et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Exercice 5

1. **a.** $+\infty$ (4 est pair) ; **b.** $-\infty$ (5 est impair) ; **c.** $+\infty$; **d.** 0 ; **e.** $-\infty$; **f.** $+\infty$; **g.** $+\infty$ (4 est pair) ; **h.** 0 ; **i.** $+\infty$; **j.** 0.
2. *Ces fonctions sont définies au réel considéré : la limite est la valeur.* $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$; $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x^2} = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$.
3. Courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$: asymptote verticale $x = 0$ (axe des ordonnées), asymptote horizontale $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$ et en $-\infty$. Courbe de l'exponentielle : asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$ seulement (en $+\infty$, $\mathrm{e}^x \to +\infty$).

Une solution de BarroTech

Exercice 6

1. $\mathrm{e}^{10} \approx 22\,026$ et $\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}0067$.
2. $\mathrm{e}^{13} \approx 442\,413 < 10^6$ et $\mathrm{e}^{14} \approx 1\,202\,604 \geq 10^6$. La suite (e^n) est croissante, donc $N = 14$. Pour tout $x \geq 14$, $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{14} \geq 10^6$: on utilise que **la fonction exponentielle est croissante**.
3. $\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}002\,48 \geq 0{,}001$ et $\mathrm{e}^{-7} \approx 0{,}000\,91 < 0{,}001$; la suite (e^{-n}) est décroissante, donc $N = 7$. Pour tout $x \leq -7$: $0 < \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{-7} < 0{,}001$ (l'exponentielle est strictement positive et croissante).
4. Démonstration :
   - La suite (e^n) est géométrique de raison $\mathrm{e} \approx 2{,}72 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
   - Soit A un réel : il existe un entier N tel que $\mathrm{e}^N \geq A$.
   - La fonction exponentielle est croissante : pour tout $x \geq N$, $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^N \geq A$.
   - L'intervalle $[A\,;+\infty[$ contient donc toutes les valeurs e^x pour $x \geq N$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Exercice 7

1. *En l'infini, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.* Pour $x \neq 0$, $x^3 - 4x^2 + 1 = x^3\left(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ et la parenthèse tend vers 1. **En $+\infty$: $+\infty$; en $-\infty$: $-\infty$.**

2. $-3x^4 + x^3 + 2 = x^4\left(-3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^4}\right)$: $x^4 \to +\infty$ et la parenthèse tend vers -3. **La limite vaut $-\infty$.**

3. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 4} = \dfrac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} \to \dfrac{3}{1}$. **La limite vaut 3.**

4. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{x + 5}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Le premier facteur tend vers 0 et le second vers 1. **La limite vaut 0.**

5. Pour $x > 1$: $\dfrac{2x^2 + 1}{x - 1} = \dfrac{x^2\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x \times \dfrac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$. Le premier facteur tend vers $+\infty$, le second vers 2. **La limite vaut $+\infty$.**

6. Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$: $\sqrt{x} - 2x = x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)$ (car $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$). La parenthèse tend vers -2 et $x \to +\infty$. **La limite vaut $-\infty$.**

7. En $+\infty$, forme $\frac{\infty}{\infty}$: on divise numérateur et dénominateur par e^x : $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$. Comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \to 0$, **la limite vaut 1.** En $-\infty$, $\mathrm{e}^x \to 0$, sans indétermination : **la limite vaut** $\dfrac{0 - 1}{0 + 1} = -1$. *Les droites $y = 1$ et $y = -1$ sont asymptotes horizontales.*

8. Forme $\frac{0}{0}$. $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, donc pour $x \neq 2$, $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$. **La limite vaut 5.**

Exercice 8

Une solution de BarroTech

1. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$: $f(x) = \dfrac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$, qui tend vers 3 en $+\infty$ et en $-\infty$. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale des deux côtés.

2. En -1 : $3x - 2 \to -5$ et $x + 1 \to 0$, avec $x + 1 > 0$ si $x > -1$ et $x + 1 < 0$ si $x < -1$.
   - À gauche : forme $\frac{-5}{0^-}$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.
   - À droite : forme $\frac{-5}{0^+}$, donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

   La droite $x = -1$ est asymptote verticale.

3. $3 - \dfrac{5}{x + 1} = \dfrac{3(x + 1) - 5}{x + 1} = \dfrac{3x - 2}{x + 1} = f(x)$. Donc $f(x) - 3 = -\dfrac{5}{x + 1}$:
   - si $x > -1$, $f(x) - 3 < 0$: la courbe est **au-dessous** de la droite $y = 3$;
   - si $x < -1$, $f(x) - 3 > 0$: la courbe est **au-dessus**.

4. $f'(x) = \dfrac{3(x + 1) - (3x - 2) \times 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{5}{(x + 1)^2} > 0$. f est croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	3	croissante	$+\infty$ ‖ $-\infty$	croissante	3

5. Quand $p \to 100^-$: $20p \to 2\,000$ et $100 - p \to 0^+$ (car $p < 100$). Par quotient, forme $\frac{2\,000}{0^+}$: $\lim\limits_{p \to 100^-} C(p) = +\infty$, comme à l'exercice 4.

Exercice 9

Méthode : on pose $X = u(x)$, on cherche la limite de X, puis celle de $v(X)$.

1. $X = -3x + 1 \to -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$. **La limite vaut 0.**
2. $X = x^2 \to +\infty$ quand $x \to -\infty$, et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$. **La limite vaut $+\infty$.**
3. $X = x^2 + x + 1 \to +\infty$ (terme de plus haut degré) et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. **La limite vaut $+\infty$.**
4. $X = \dfrac{9x - 1}{x + 5} = \dfrac{9 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x}} \to 9$ et $\lim\limits_{X \to 9} \sqrt{X} = 3$. **La limite vaut 3.**
5. $X = \dfrac{1 - x}{x + 2} = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{2}{x}} \to -1$ et $\lim\limits_{X \to -1} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-1}$. **La limite vaut $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.**
6. Quand $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, donc $X = -\dfrac{1}{x} \to -\infty$ et $\mathrm{e}^X \to 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$. Quand $x \to 0^-$, $\dfrac{1}{x} \to -\infty$, donc $X = -\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\mathrm{e}^X \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = +\infty$.
7. *Si $f(x) \to L$ en $+\infty$, alors $f(n) \to L$.* Avec $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2 + 1}{x^2 + 3}} : \dfrac{4x^2 + 1}{x^2 + 3} = \dfrac{4 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \to 4$ et $\sqrt{X} \to 2$: $\lim u_n = 2$. Avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$: $-x^2 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^X \to 0$: $\lim v_n = 0$.

Exercice 10

1. $v(0) = 50(1 - 1) = 0$; $v(5) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 31{,}6$ m/s ; $v(20) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-4}\right) \approx 49{,}1$ m/s.
2. Quand $t \to +\infty$, $-0{,}2t \to -\infty$, donc $\mathrm{e}^{-0{,}2t} \to 0$ (composition) et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 50$. La vitesse se stabilise vers 50 m/s : c'est la vitesse limite. En kilomètres par heure : $50 \times 3{,}6 = 180$ km/h. La droite d'équation $y = 50$ est asymptote horizontale.
3. Pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$, donc $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} < 1$ et $v(t) < 50$.
4. $v(t) = 50 - 50\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, donc $v'(t) = -50 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$. **$v$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.**
5. $v(19) \approx 48{,}88 < 49$ et $v(20) \approx 49{,}08 \geq 49$. Comme v est croissante, **le plus petit entier est $t = 20$** : au bout de 20 secondes, la vitesse dépasse 49 m/s.
6. $w_n = v(n)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 50$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 50$.

Exercice 11

1. $\sin x \geq -1$, donc $x^2 + 3\sin x \geq x^2 - 3$, et $x^2 - 3 \to +\infty$. Par comparaison, **la limite vaut $+\infty$.**
2. $-\cos x \leq 1$, donc $2x - \cos x \leq 2x + 1$, et $2x + 1 \to -\infty$ quand $x \to -\infty$. Par comparaison, **la limite vaut $-\infty$.**
3. Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\cos x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Les deux bornes tendent vers 0. Par le théorème des gendarmes, **la limite vaut 0.**
4. Pour $x > 0$, $\dfrac{3x + \sin x}{x} = 3 + \dfrac{\sin x}{x}$ et $3 - \dfrac{1}{x} \leq 3 + \dfrac{\sin x}{x} \leq 3 + \dfrac{1}{x}$. Les bornes tendent vers 3 : par les gendarmes, **la limite vaut 3.**

5. $\mathrm{e}^x > 0$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^x \cos x \leq \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Par les gendarmes (en $-\infty$), **la limite vaut** 0.

Exercice 12

1. La fonction k.
   - **a.** $k'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. D'après l'inégalité rappelée, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$, donc $k'(x) \geq 0$.
   - **b.** k est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $k(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$, $k(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Pour $x > 0$, en divisant par x : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2} \geq \dfrac{x}{2}$, car $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$. Comme $\dfrac{x}{2} \to +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. *C'est l'étape 1 de la démonstration de la croissance comparée, par une autre inégalité.*
3. Pour tout réel x, appliquée à $-x$, l'inégalité donne $\mathrm{e}^{-x} \geq -x + 1 = 1 - x$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

Exercice 13

1. Croissance comparée avec $n = 3$: $+\infty$.
2. $x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$: croissance comparée, 0.
3. Croissance comparée en $-\infty$ ($n = 3$) : 0.
4. Forme $\infty - \infty$. On factorise par e^x : $x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$. La parenthèse tend vers -1 (croissance comparée) et $\mathrm{e}^x \to +\infty$. **La limite vaut $-\infty$.**
5. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On divise par e^x : $\dfrac{1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}}$; comme $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0$, **la limite vaut** 1.
6. $(x^2 + x)\,\mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x$; les deux termes tendent vers 0 en $-\infty$ (croissance comparée). **La limite vaut 0.**
7. $(2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x} = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$; $x\,\mathrm{e}^{-x} \to 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. **La limite vaut 0.**
8. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^5\,\mathrm{e}^{-x} \to 0$: $\lim u_n = 0$. $v_n = \mathrm{e}^n - n^2 = \mathrm{e}^n \left(1 - \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}\right)$, la parenthèse tend vers 1 : $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 14

1. Quand $x \to -\infty$: $x + 2 \to -\infty$ et $-x \to +\infty$, donc $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}$. En $+\infty$, $x\,\mathrm{e}^{-x} \to 0$ (croissance comparée) et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.
3. *Dérivée d'un produit, et* $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' = -\mathrm{e}^{-x}$. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x + 2)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = (1 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

une solution de BarroTech

4. $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-x-1$: positif si $x < -1$, négatif si $x > -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	croissante	e	décroissante	0

Le maximum est $f(-1) = (-1+2)\,\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e} \approx 2{,}72$.

5. $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $x+2$: $f(x) < 0$ si $x < -2$, $f(-2) = 0$, $f(x) > 0$ si $x > -2$. L'asymptote est la droite $y = 0$: **la courbe est au-dessus de son asymptote pour** $x > -2$, et au-dessous pour $x < -2$.

Une solution de BarroTech