Limites de suites

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : suites qui tendent vers l'infini

Exercice 1 : utiliser la définition

On considère les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 7$ et $v_n = 5 - n^2$.

1. Calculer u_0, u_1, u_{10}, puis v_0, v_1, v_{10}.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 1000$.
3. Soit A un réel. Déterminer un rang à partir duquel $u_n \geq A$. Que peut-on en conclure ?
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n \leq -10\,000$.
5. Soit A un réel inférieur ou égal à 5. Montrer que $v_n \leq A$ dès que $n \geq \sqrt{5 - A}$. Conclure.

Exercice 2 : croissante, non majorée, et contre-exemples

1. Soit $u_n = \sqrt{n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   - **b.** Soit $M > 0$. Montrer que $u_n > M$ dès que $n > M^2 - 3$. En déduire que (u_n) n'est pas majorée.
   - **c.** Conclure sur la limite de (u_n).
2. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.
   - **a.** Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
   - **b.** Une suite croissante tend vers $+\infty$.
   - **c.** Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante. *Indication : étudier $t_n = n + 2(-1)^n$.*
   - **d.** Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.
3. Écrire la négation de la proposition « la suite (u_n) tend vers $+\infty$ », en partant de la phrase : « pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$ ».

Une solution de BarroTech

Leçon 2 : suites convergentes

Exercice 3 : convergence par la définition

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n + 1}{n + 1}$.

1. Montrer que, pour tout n, $u_n = 2 - \dfrac{1}{n + 1}$.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \in]1{,}99\,;\,2{,}01[$.
3. Soit p un entier naturel. Montrer que $u_n \in]2 - 10^{-p}\,;\,2 + 10^{-p}[$ dès que $n \geq 10^p$.

4. Soit $]a\,;b[$ un intervalle ouvert contenant 2. Expliquer pourquoi il contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Conclure.

Exercice 4 : écriture décimale, suite sans limite

1. Soit $v_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$, pour $n \geq 1$.
   - **a.** Donner l'écriture décimale de v_1, v_2 et v_3.
   - **b.** Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $v_n \in]0{,}9999\,;1{,}0001[$.
   - **c.** Conjecturer la limite de (v_n).
2. Donner, sans justification, la limite de chacune des suites : $\dfrac{1}{n^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, n^3, $\sqrt{n}$.
3. Soit $w_n = (-1)^n$.
   - **a.** Montrer que l'intervalle $]0\,;2[$ ne contient aucun terme de rang impair. En déduire que (w_n) ne converge pas vers 1.
   - **b.** Montrer de même que (w_n) ne converge pas vers -1.
   - **c.** Soit ℓ un réel différent de 1 et de -1, et r le plus petit des deux nombres $|\ell - 1|$ et $|\ell + 1|$. Justifier que l'intervalle $]\ell - r\,;\ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite. Conclure.
   - **d.** La suite (w_n) tend-elle vers $+\infty$? vers $-\infty$? Conclure.

Leçon 3 : opérations sur les limites

Une solution de BarroTech

Exercice 5 : sans forme indéterminée

Déterminer la limite de chaque suite, définie pour $n \geq 1$, en citant la règle utilisée.

1. $a_n = \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 - \dfrac{5}{n^2}\right)$
2. $b_n = n^2 + \sqrt{n}$
3. $c_n = 7 + \dfrac{4}{n^2 + 1}$
4. $d_n = \left(\dfrac{1}{n} - 3\right) n^2$
5. $e_n = \dfrac{-2}{\sqrt{n} + 1}$
6. $f_n = \dfrac{n^2 + 1}{2 + \frac{1}{n}}$

Exercice 6 : lever une forme indéterminée

Déterminer la limite de chaque suite, définie pour $n \geq 1$, en précisant d'abord la forme indéterminée.

1. $u_n = n^2 - 7n + 3$
2. $v_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n^2 + n}$
3. $w_n = \dfrac{3n + 2}{n^2 + 1}$

4. $x_n = \dfrac{n^3 - 2n}{5n^2 + 1}$
5. $y_n = 2n - \sqrt{n}$
6. $z_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ *Indication : multiplier et diviser par $\sqrt{n+4} + \sqrt{n}$.*

Leçon 4 : comparaison et théorème des gendarmes

Exercice 7 : théorèmes de comparaison

1. Déterminer la limite de chaque suite.
   - **a.** $u_n = 3n + (-1)^n$
   - **b.** $v_n = -n^2 + 2\cos n$
   - **c.** $w_n = n^2 + (-1)^n\, n$
2. On suppose que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, en adaptant la démonstration du cours.

Exercice 8 : théorème des gendarmes

1. Déterminer la limite de chaque suite, définie pour $n \geq 1$.
   - **a.** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
   - **b.** $b_n = \dfrac{2n + \cos n}{n}$
   - **c.** $c_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$
   - **d.** $d_n = \dfrac{n + \sin n}{n^2 + 1}$
2. Soit (u_n) une suite convergente telle que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < 3 + \dfrac{1}{n}$. Que peut-on dire de sa limite ℓ ? Peut-on affirmer que $\ell < 3$? *Indication : penser à $u_n = 3 + \dfrac{1}{2n}$.*

Une solution de BarroTech

Leçon 5 : limite d'une suite géométrique

Exercice 9 : limites avec q^n

Déterminer la limite de chaque suite, ou justifier qu'elle n'en a pas.

1. $0{,}9^n$
2. $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$
3. $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
4. $(-2)^n$
5. $4 - 3 \times 0{,}6^n$
6. $-5 \times 1{,}1^n$

7. $\dfrac{2^n}{5^n}$
8. $3^n - 2^n$ *Indication : factoriser par 3^n.*
9. $\dfrac{3^n + 1}{3^n - 2}$

Exercice 10 : somme géométrique et inégalité de Bernoulli

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   - **a.** Montrer que $S_n = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.
   - **b.** En déduire la limite de (S_n).
2. Inégalité de Bernoulli.
   - **a.** À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1{,}01^n \geq 1 + 0{,}01\,n$.
   - **b.** En déduire un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $1{,}01^n \geq 100$.
   - **c.** À la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $1{,}01^n \geq 100$. Comparer avec la question précédente.

Leçon 6 : suites monotones et convergence

Exercice 11 : une suite décroissante minorée

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $5 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite.

Exercice 12 : une valeur approchée du nombre e

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$ (on lit « factorielle k »), et on pose $0! = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 1 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$, puis que $S_n < 3$.
5. Conclure que la suite (S_n) converge. On admet que sa limite est le nombre $e = \exp(1)$.
6. On considère la fonction Python ci-dessous. Expliquer ce que contient la variable `f` après chaque passage dans la boucle, puis donner une valeur approchée de `S(10)`. Comparer avec la valeur de e donnée par la calculatrice.

```
def S(n):
    s = 1          # terme 1/0!
    f = 1
    for k in range(1, n + 1):
        f = f * k
        s = s + 1 / f
    return s
```

Leçon 7 : algorithmes, seuil et valeurs approchées

Exercice 13 : un algorithme de seuil

En 2026, une ville compte $20\,000$ habitants. On suppose que sa population baisse de $2\,\%$ par an. On note u_n le nombre d'habitants en l'année $2026 + n$.

1. Justifier que (u_n) est une suite géométrique, et exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de (u_n). Que peut-on en dire pour la ville, si le modèle restait valable ?
3. On veut déterminer l'année où la population passe sous $15\,000$ habitants. Recopier et compléter la fonction Python :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 20000
    while ...:
        u = ...
        n = ...
    return n
```

Une solution de BarroTech

4. Que renvoie la fonction ? En quelle année la population passe-t-elle sous $15\,000$ habitants ?
5. Pourquoi est-on sûr que la boucle s'arrête ?
6. Écrire une instruction Python qui crée, en compréhension, la liste des populations (arrondies à l'unité) de 2026 à 2030.

Exercice 14 : une valeur approchée du nombre d'or

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 sous forme de fractions.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $1 \leq u_n \leq 2$.
3. Le programme suivant construit la liste des termes par ajouts successifs. Que contient `u[-1]` à la fin ? Que s'affiche-t-il ?

```
u = [1]
for n in range(20):
    u.append(1 + 1 / u[-1])
print(u[-1])
```

4. La suite n'est pas monotone (comparer u_0, u_1 et u_2). On admet qu'elle converge vers un réel ℓ. Justifier que $1 \leq \ell \leq 2$, puis que $\ell = 1 + \dfrac{1}{\ell}$.
5. En déduire que $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or), et en donner une valeur approchée.

Leçon 8 : modéliser une évolution par une suite

Exercice 15 : les livres d'une médiathèque

Le 1er janvier 2027, une médiathèque possède 8000 livres. Chaque année, elle retire $5\,\%$ de ses livres, trop abîmés, et en achète 600 nouveaux. On note u_n le nombre de livres le 1er janvier de l'année $2027 + n$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 600$.
3. On pose $v_n = u_n - 12\,000$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
4. En déduire que, pour tout n, $u_n = 12\,000 - 4000 \times 0{,}95^n$.
5. Étudier le sens de variation de (u_n) et déterminer sa limite. Interpréter.
6. À l'aide d'un algorithme de seuil, déterminer à partir de quelle année la médiathèque possède plus de $10\,000$ livres.

Exercice 16 : deux applications de covoiturage

Une solution de BarroTech

Dans une ville, les personnes qui covoiturent utilisent l'une des deux applications A ou B. Chaque mois, $10\,\%$ des utilisateurs de A passent à B, et $20\,\%$ des utilisateurs de B passent à A ; le nombre total d'utilisateurs reste constant. Au départ, la moitié des utilisateurs a choisi A. On note a_n la proportion d'utilisateurs de A au bout de n mois : $a_0 = 0{,}5$.

1. Justifier que $a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}2\,(1 - a_n)$, puis que $a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}2$.
2. Calculer a_1 et a_2.
3. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = 0{,}7\,\ell + 0{,}2$.
4. Montrer que la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - \dfrac{2}{3}$ est géométrique. En déduire que $a_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n$.
5. Déterminer la limite de (a_n) et l'interpréter.
6. À partir de combien de mois plus de $66\,\%$ des utilisateurs ont-ils choisi A ?