Limites de suites

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. $u_0 = -7$, $u_1 = -4$, $u_{10} = 23$; $\quad v_0 = 5$, $v_1 = 4$, $v_{10} = 5 - 100 = -95$.
2. $u_n \geq 1000 \iff 3n \geq 1007 \iff n \geq \dfrac{1007}{3} \approx 335{,}7$. **Le plus petit entier est $n = 336$.** Contrôle : $u_{335} = 998$ et $u_{336} = 1001$.
3. $u_n \geq A \iff n \geq \dfrac{A+7}{3}$. Tout entier $N \geq \dfrac{A+7}{3}$ convient : pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. *C'est la définition :* tout intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes à partir du rang N, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. $v_n \leq -10\,000 \iff n^2 \geq 10\,005$. Or $100^2 = 10\,000 < 10\,005$ et $101^2 = 10\,201 \geq 10\,005$. **Le plus petit entier est $n = 101$.** Contrôle : $v_{100} = -9995$ et $v_{101} = -10\,196$.
5. Pour $A \leq 5$, on a $5 - A \geq 0$, et $v_n \leq A \iff n^2 \geq 5 - A \iff n \geq \sqrt{5-A}$ (car $n \geq 0$). Donc tout intervalle $]-\infty\,;A]$ contient les termes v_n à partir du rang $\sqrt{5-A}$. (Si $A > 5$, c'est encore plus simple : tous les termes sont inférieurs ou égaux à 5, donc à A.) **Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.**

Exercice 2

Une solution de BarroTech

1. La suite $u_n = \sqrt{n+3}$.
   - **a.** Pour tout n, $n + 4 > n + 3 \geq 0$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $u_{n+1} = \sqrt{n+4} > \sqrt{n+3} = u_n$. La suite est croissante.
   - **b.** Si $n > M^2 - 3$, alors $n + 3 > M^2$, donc $\sqrt{n+3} > \sqrt{M^2} = M$ (car $M > 0$). Aucun réel $M > 0$ n'est donc un majorant (et un réel négatif ou nul non plus, puisque $u_n > 0$) : **la suite n'est pas majorée.**
   - **c.** (u_n) est croissante et non majorée : d'après le théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Vrai ou faux :
   - **a. Faux.** $w_n = n\big(1 + (-1)^n\big)$ n'est pas majorée ($w_{2k} = 4k$), mais $w_n = 0$ pour tout n impair : l'intervalle $[1\,;+\infty[$ ne contient aucun terme de rang impair, donc (w_n) ne tend pas vers $+\infty$.
   - **b. Faux.** $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ est croissante, mais $u_n < 1$ pour tout n : l'intervalle $[1\,;+\infty[$ ne contient aucun terme.
   - **c. Faux.** $t_n = n + 2(-1)^n$: pour tout n, $t_n \geq n - 2$, donc $t_n \geq A$ dès que $n \geq A + 2$; la suite tend vers $+\infty$. Pourtant, $t_0 = 2$ et $t_1 = -1$: elle n'est pas croissante. Plus précisément, $t_{2k+1} - t_{2k} = -3 < 0$ pour tout k : elle n'est même croissante à partir d'aucun rang.
   - **d. Vrai.** Si (u_n) était majorée par un réel M, l'intervalle $[M+1\,;+\infty[$ ne contiendrait aucun terme, ce qui contredit $u_n \to +\infty$.

3. *On échange « pour tout » et « il existe », et on nie la dernière inégalité.* « Il existe un réel A tel que, pour tout rang N, il existe un entier $n \geq N$ avec $u_n < A$. »

Exercice 3

1. $2 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} = u_n$.
2. On a toujours $u_n < 2 < 2{,}01$. Et $u_n > 1{,}99 \iff \dfrac{1}{n+1} < 0{,}01 \iff n+1 > 100 \iff n > 99$. **Le plus petit entier est $n = 100$.** Attention : $u_{99} = 1{,}99$ n'appartient pas à l'intervalle ouvert.
3. De même, $u_n \in]2 - 10^{-p} ; 2 + 10^{-p}[\iff \dfrac{1}{n+1} < 10^{-p} \iff n+1 > 10^p$, ce qui est vrai dès que $n \geq 10^p$.
4. $]a ; b[$ contient 2, donc $a < 2 < b$. On choisit un entier p assez grand pour que $10^{-p} \leq 2 - a$ et $10^{-p} \leq b - 2$. Alors $]2 - 10^{-p} ; 2 + 10^{-p}[\subset]a ; b[$, et d'après la question 3, $]a ; b[$ contient tous les termes à partir du rang 10^p. **Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.**

Exercice 4

1. La suite $v_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$.
   - **a.** $v_1 = 0{,}9$; $v_2 = 0{,}99$; $v_3 = 0{,}999$.
   - **b.** On a toujours $v_n < 1 < 1{,}0001$. Et $v_n > 0{,}9999 \iff \dfrac{1}{10^n} < 10^{-4} \iff n > 4$. **Le plus petit entier est $n = 5$** ($v_4 = 0{,}9999$ est exclu).
   - **c.** La suite semble converger vers 1 (c'est le cas : $v_n \in]1 - 10^{-p} ; 1 + 10^{-p}[$ dès que $n > p$).
2. $\dfrac{1}{n^3} \to 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$; $n^3 \to +\infty$; $\sqrt{n} \to +\infty$.
3. La suite $w_n = (-1)^n$.
   - **a.** Les termes de rang impair valent -1, qui n'appartient pas à $]0 ; 2[$. Il y a des rangs impairs aussi grands qu'on veut : l'intervalle ouvert $]0 ; 2[$, qui contient 1, ne contient pas tous les termes à partir d'un certain rang. **(w_n) ne converge pas vers 1.**
   - **b.** Les termes de rang pair valent 1, qui n'appartient pas à $]-2 ; 0[$. Cet intervalle ouvert contient -1 mais ne contient aucun terme de rang pair : **(w_n) ne converge pas vers -1.**
   - **c.** $r > 0$ car $\ell \neq 1$ et $\ell \neq -1$. Comme $|\ell - 1| \geq r$, le nombre 1 n'est pas dans $]\ell - r ; \ell + r[$; de même pour -1. Cet intervalle ouvert contient ℓ mais aucun terme de la suite : **(w_n) ne converge pas vers ℓ.** Par exemple, pour $\ell = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ et l'intervalle $]0 ; 1[$ ne contient ni 1 ni -1.
   - **d.** Tous les termes sont inférieurs ou égaux à 1 : l'intervalle $[2 ; +\infty[$ n'en contient aucun, donc (w_n) ne tend pas vers $+\infty$. De même, $]-\infty ; -2]$ n'en contient aucun. **La suite (w_n) n'a pas de limite.**

Une solution de BarroTech

Exercice 5

1. $3 + \dfrac{1}{n} \to 3$ et $2 - \dfrac{5}{n^2} \to 2$. Par produit, $\lim a_n = 6$.
2. $n^2 \to +\infty$ et $\sqrt{n} \to +\infty$. Par somme, $\lim b_n = +\infty$.
3. $n^2 + 1 \to +\infty$, donc $\dfrac{4}{n^2+1} \to 0$ (quotient d'un réel par une suite qui tend vers l'infini). Par somme, $\lim c_n = 7$.
4. $\dfrac{1}{n} - 3 \to -3$ et $n^2 \to +\infty$. Par produit, avec la règle des signes, $\lim d_n = -\infty$.
5. $\sqrt{n} + 1 \to +\infty$. Par quotient, $\lim e_n = 0$.
6. $n^2 + 1 \to +\infty$ et $2 + \dfrac{1}{n} \to 2 > 0$. Par quotient, $\lim f_n = +\infty$.

Exercice 6

Dans chaque cas, on factorise par le terme le plus fort.

1. Forme $\infty - \infty$. $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{7}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$; la parenthèse tend vers 1 et $n^2 \to +\infty$: $\lim u_n = +\infty$.
2. Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. $v_n = \dfrac{n^2\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{4 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \to \dfrac{4}{2}$: $\lim v_n = 2$. *Autre méthode :* $4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$ et $2n^2 + n = n(2n+1)$, donc $v_n = \dfrac{2n-1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$.
3. Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. $w_n = \dfrac{n\left(3 + \frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$; le premier facteur tend vers 0, le second vers 3 : $\lim w_n = 0$.
4. Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. $x_n = \dfrac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(5 + \frac{1}{n^2}\right)} = n \times \dfrac{1 - \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}}$; le second facteur tend vers $\frac{1}{5} > 0$ et $n \to +\infty$: $\lim x_n = +\infty$.
5. Forme $\infty - \infty$. $y_n = n\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, car $\dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; la parenthèse tend vers 2 : $\lim y_n = +\infty$.
6. Forme $\infty - \infty$. Avec l'expression conjuguée :

$$z_n = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{(n+4) - n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$: $\lim z_n = 0$.

Exercice 7

1. *On encadre $(-1)^n$, $\cos n$ par -1 et 1.*
   - **a.** $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq 3n - 1$. Or $3n - 1 \to +\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
   - **b.** $\cos n \leq 1$, donc $v_n \leq -n^2 + 2$. Or $-n^2 + 2 \to -\infty$. Par comparaison, $\lim v_n = -\infty$.
   - **c.** $(-1)^n n \geq -n$, donc $w_n \geq n^2 - n = n(n-1)$. Or $n \to +\infty$ et $n - 1 \to +\infty$, donc $n(n-1) \to +\infty$. Par comparaison, $\lim w_n = +\infty$.

2. Soit A un réel. Comme $v_n \to -\infty$, il existe un rang N_1 tel que $v_n \leq A$ pour tout $n \geq N_1$. Par hypothèse, il existe un rang N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$. Soit N le plus grand des deux rangs. Pour tout $n \geq N$: $u_n \leq v_n \leq A$. L'intervalle $]-\infty\,;A]$ contient donc tous les termes u_n à partir du rang N : $\lim u_n = -\infty$.

Exercice 8

1. *On encadre, puis on applique le théorème des gendarmes.*
   - **a.** $-\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, et les deux bornes tendent vers 0 : $\lim a_n = 0$.
   - **b.** $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $\dfrac{2n-1}{n} \leq b_n \leq \dfrac{2n+1}{n}$, c'est-à-dire $2 - \dfrac{1}{n} \leq b_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 2 : $\lim b_n = 2$.
   - **c.** $2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4$ et $\sqrt{n} > 0$, donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq c_n \leq \dfrac{4}{\sqrt{n}}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim c_n = 0$.
   - **d.** $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leq d_n \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$. Comme à l'exercice 6, en factorisant par n au numérateur et n^2 au dénominateur, les deux bornes tendent vers 0 : $\lim d_n = 0$.
2. $u_n < 3 + \dfrac{1}{n}$ et $3 + \dfrac{1}{n} \to 3$. Par passage à la limite, $\ell \leq 3$. On ne peut **pas** affirmer $\ell < 3$: la suite $u_n = 3 + \dfrac{1}{2n}$ vérifie $u_n < 3 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, et pourtant sa limite vaut 3. Les inégalités strictes deviennent larges.

Une solution de BarreTech

Exercice 9

1. $-1 < 0{,}9 < 1$: $0{,}9^n \to 0$.
2. $\dfrac{5}{4} > 1$: $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n \to +\infty$.
3. $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$: $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$.
4. $-2 \leq -1$: $\left((-2)^n\right)$ **n'a pas de limite** (termes $1, -2, 4, -8, \ldots$ de signes alternés, de valeur absolue $2^n \to +\infty$).
5. $0{,}6^n \to 0$, donc $4 - 3 \times 0{,}6^n \to 4$.
6. $1{,}1^n \to +\infty$ et $-5 < 0$: $-5 \times 1{,}1^n \to -\infty$.
7. $\dfrac{2^n}{5^n} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ avec $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$: **la limite vaut** 0.
8. Forme $\infty - \infty$. $3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$; la parenthèse tend vers 1 et $3^n \to +\infty$: **la limite vaut** $+\infty$.
9. $3^n - 2$ ne s'annule jamais (les puissances de 3 valent $1, 3, 9, \ldots$). On divise par 3^n : $\dfrac{3^n+1}{3^n-2} = \dfrac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$, qui tend vers $\dfrac{1+0}{1-0}$: **la limite vaut** 1.

Exercice 10

1. Somme géométrique.
   - **a.** *Somme des termes d'une suite géométrique (Première) :* pour $q \neq 1$, $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Avec $q = \dfrac{1}{3}$: $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.
   - **b.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$. Donc $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$.
2. Inégalité de Bernoulli.
   - **a.** L'inégalité de Bernoulli avec $a = 0{,}01 > 0$ donne, pour tout n : $1{,}01^n = (1 + 0{,}01)^n \geq 1 + 0{,}01\,n$.
   - **b.** $1 + 0{,}01\,n \geq 100 \iff n \geq 9900$. Pour tout $n \geq 9900$: $1{,}01^n \geq 1 + 0{,}01\,n \geq 100$. **$N = 9900$ convient.**
   - **c.** À la calculatrice (ou avec un algorithme de seuil), le plus petit entier est $n = 463$. L'inégalité de Bernoulli garantit l'existence d'un rang, mais le rang qu'elle fournit (9900) est beaucoup plus grand que le premier rang qui convient.

Exercice 11

1. $u_1 = 0{,}6 \times 10 + 2 = 8$; $\quad u_2 = 0{,}6 \times 8 + 2 = 6{,}8$.
2. Soit $P(n)$: « $5 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».
   - *Initialisation* : $u_1 = 8$ et $u_0 = 10$, donc $5 \leq 8 \leq 10$: $P(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $5 \leq u_{n+1} \leq u_n$. On multiplie par $0{,}6 > 0$: $3 \leq 0{,}6\,u_{n+1} \leq 0{,}6\,u_n$. On ajoute 2 : $5 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : pour tout n, $5 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. La suite est décroissante et minorée par 5 : **elle converge** (théorème de convergence monotone).
4. Soit ℓ sa limite. Quand $n \to +\infty$, $u_{n+1} \to \ell$ et $0{,}6\,u_n + 2 \to 0{,}6\,\ell + 2$. Par unicité de la limite, $\ell = 0{,}6\,\ell + 2$, donc $0{,}4\,\ell = 2$ et $\ell = 5$. *Contrôle :* $\ell \geq 5$ par passage à la limite, ce qui est cohérent. (On peut aussi vérifier que $u_n = 5 + 5 \times 0{,}6^n$.)

Exercice 12

1. $S_0 = 1$; $S_1 = 1 + 1 = 2$; $S_2 = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$; $S_3 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{3}$.
2. $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$: **la suite est croissante.**
3. Soit $P(k)$: « $k! \geq 2^{k-1}$ », pour $k \geq 1$.
   - *Initialisation* : $1! = 1$ et $2^0 = 1$: $P(1)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $k! \geq 2^{k-1}$. Alors $(k+1)! = (k+1) \times k! \geq 2 \times 2^{k-1} = 2^k$, car $k + 1 \geq 2$ et $k! > 0$. Donc $P(k+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : pour tout $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.

4. D'après la question 3, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ pour tout $k \geq 1$. En ajoutant ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$, et le terme $\frac{1}{0!} = 1$:

$$S_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

5. (S_n) est croissante et majorée par 3 : **elle converge.** (Sa limite est $e \approx 2{,}718$, résultat admis ici.)
6. Après le passage dans la boucle avec la valeur k, `f` contient $k!$ (on multiplie par k la valeur précédente $(k-1)!$), et `s` contient S_k. `S(10)` renvoie environ $2{,}718\,281\,8$, et la calculatrice donne $e \approx 2{,}718\,281\,8$: les sept premières décimales sont les mêmes.

Exercice 13

1. Baisser de $2\,\%$, c'est multiplier par $0{,}98$: $u_{n+1} = 0{,}98\,u_n$. La suite est géométrique de raison $0{,}98$ et de premier terme $u_0 = 20\,000$: $u_n = 20\,000 \times 0{,}98^n$.
2. $-1 < 0{,}98 < 1$, donc $0{,}98^n \to 0$ et $\lim u_n = 0$. Si le modèle restait valable, la population finirait par devenir aussi petite qu'on veut. *Un modèle n'est valable que sur une durée limitée.*
3. Fonction complétée :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 20000
    while u >= 15000:
        u = 0.98 * u
        n = n + 1
    return n
```

Une solution de BarroTech

4. La fonction renvoie 15 : $u_{14} \approx 15\,073$ et $u_{15} \approx 14\,771$. La population passe sous $15\,000$ habitants en $2026 + 15 = 2041$.
5. $u_n \to 0$, donc l'intervalle ouvert $]-1\,;15\,000[$, qui contient 0, contient tous les termes à partir d'un certain rang : la condition `u >= 15000` finit par devenir fausse.
6. `[round(20000 * 0.98**n) for n in range(5)]` donne `[20000, 19600, 19208, 18824, 18447]`.

Exercice 14

1. $u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{3}{2}$; $u_3 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$; $u_4 = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$; $u_5 = 1 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{13}{8}$.
2. Soit $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 2$ ».
   - *Initialisation* : $u_0 = 1$: $P(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : si $1 \leq u_n \leq 2$, la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 1$, puis $\dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$: $P(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : pour tout n, $1 \leq u_n \leq 2$.

3. La liste contient $u_0, u_1, \ldots, u_{20}$, et `u[-1]` est le dernier terme ajouté, $u_{20} = \dfrac{17\,711}{10\,946}$. Le programme affiche `1.618033985017358`.
4. $u_0 = 1 < u_1 = 2$ et $u_1 = 2 > u_2 = 1{,}5$: la suite n'est ni croissante ni décroissante. Comme $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n, par passage à la limite, $1 \leq \ell \leq 2$. En particulier $\ell \neq 0$, donc $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$ (quotient). Comme $u_{n+1} \to \ell$, l'unicité de la limite donne $\ell = 1 + \dfrac{1}{\ell}$.
5. En multipliant par $\ell \neq 0$: $\ell^2 = \ell + 1$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Le discriminant vaut 5 ; les racines sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, le nombre d'or. ($u_{20}$ en donne déjà huit décimales exactes : $1{,}618\,033\,98$.)

Exercice 15

1. $u_1 = 0{,}95 \times 8000 + 600 = 7600 + 600 = 8200$.
2. Retirer $5\,\%$ des livres, c'est en garder $95\,\%$, donc multiplier par $0{,}95$; puis on ajoute 600 : $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 600$.
3. $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000 = 0{,}95\,u_n + 600 - 12\,000 = 0{,}95\,u_n - 11\,400 = 0{,}95\,(u_n - 12\,000) = 0{,}95\,v_n$. (v_n) **est géométrique de raison** $0{,}95$, de premier terme $v_0 = 8000 - 12\,000 = -4000$.
4. $v_n = -4000 \times 0{,}95^n$, donc $u_n = v_n + 12\,000 = 12\,000 - 4000 \times 0{,}95^n$.
5. $u_{n+1} - u_n = 4000 \times 0{,}95^n\,(1 - 0{,}95) = 200 \times 0{,}95^n > 0$: **la suite est croissante.** Comme $-1 < 0{,}95 < 1$, $0{,}95^n \to 0$ et $\lim u_n = 12\,000$. Le nombre de livres augmente et se stabilise à long terme vers $12\,000$, sans l'atteindre.
6. $u_n > 10\,000 \iff 0{,}95^n < 0{,}5$. Un algorithme de seuil (boucle `while u <= 10000`) renvoie 14 : $u_{13} \approx 9947$ et $u_{14} \approx 10\,049$. La médiathèque possède plus de $10\,000$ livres à partir du 1er janvier **2041**.

Une solution de BarroTech

Exercice 16

1. Au mois $n+1$, les utilisateurs de A sont ceux qui restaient chez A ($90\,\%$ de a_n) et ceux qui viennent de B ($20\,\%$ de la proportion $1 - a_n$ des utilisateurs de B). Donc $a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}2\,(1 - a_n) = 0{,}9\,a_n - 0{,}2\,a_n + 0{,}2 = 0{,}7\,a_n + 0{,}2$.
2. $a_1 = 0{,}7 \times 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}55$; $\quad a_2 = 0{,}7 \times 0{,}55 + 0{,}2 = 0{,}585$.
3. $\ell = 0{,}7\,\ell + 0{,}2 \iff 0{,}3\,\ell = 0{,}2 \iff \ell = \dfrac{2}{3}$.
4. $b_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{2}{3} = 0{,}7\,a_n + 0{,}2 - \dfrac{2}{3} = 0{,}7\,a_n - \dfrac{7}{15} = 0{,}7\left(a_n - \dfrac{2}{3}\right) = 0{,}7\,b_n$. (b_n) est géométrique de raison $0{,}7$ et de premier terme $b_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}$. Donc $b_n = -\dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n$ et $a_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n$.
5. $0{,}7^n \to 0$, donc $\lim a_n = \dfrac{2}{3}$: à long terme, environ deux utilisateurs sur trois choisissent A.

6. $a_n > 0{,}66 \iff \dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n < \dfrac{2}{3} - 0{,}66 = \dfrac{1}{150} \iff 0{,}7^n < 0{,}04$. Un algorithme de seuil donne $n = 10$: $a_9 \approx 0{,}6599$ et $a_{10} \approx 0{,}6620$. Plus de $66\,\%$ des utilisateurs ont choisi A **à partir du dixième mois**.

Une solution de BarroTech