Récurrence et suites

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 1 · EXERCICES

Deux exercices par leçon. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ». La calculatrice est autorisée.

Leçon 1 : rappels de Première sur les suites

Exercice 1 : suites arithmétiques et géométriques

1. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -2.
   a. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{20}.
   b. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.
2. (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 2.
   a. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_8.
   b. Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_8$.
3. (w_n) est une suite arithmétique telle que $w_3 = 11$ et $w_8 = 26$. Déterminer sa raison, son premier terme w_0, puis w_{100}.
4. Calculer $1 + 2 + \cdots + 50$, puis $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{10}}$ sous forme de fraction.

Exercice 2 : deux propositions de salaire, et sens de variation

Une solution de BarroTech

Partie A. Une entreprise propose un salaire annuel de $24\,000$ € en 2026, avec, au choix :

- proposition A : une augmentation de 600 € par an ;
- proposition B : une augmentation de $2{,}5\,\%$ par an.

On note a_n et b_n le salaire annuel de l'année $2026 + n$ avec les propositions A et B.

1. Préciser la nature des suites (a_n) et (b_n), puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.
2. Comparer a_1 et b_1. Calculer a_{10} et b_{10}, au centime près.
3. Calculer, au centime près, le total des salaires perçus de 2026 à 2036 inclus avec chaque proposition. Laquelle est la plus avantageuse sur cette période ?

Partie B. Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = 2n^2 - 9n + 1$
2. $v_n = 5 \times 0{,}8^n$
3. $w_n = 3 - \dfrac{2}{n+1}$

Leçon 2 : le raisonnement par récurrence

Exercice 3 : des divisibilités

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

1. $7^n - 1$ est divisible par 6 ;
2. $n^3 - n$ est divisible par 3 ;
3. $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Indication pour la question 3 : $3^{2(n+1)} = 9 \times 3^{2n}$.

Exercice 4 : les deux étapes sont indispensables

1. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $6^n + 1$ est divisible par 5 ».
   a. Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
   b. $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie ?
   c. Démontrer par récurrence que $6^n - 1$ est divisible par 5 pour tout entier naturel n. En déduire que $\mathcal{P}(n)$ est fausse pour tout n.
2. Un élève affirme : « Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $n^2 - n + 11$ est premier. »
   a. Calculer $n^2 - n + 11$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   b. On admet que ce nombre est premier pour tout n de 1 à 10. Calculer sa valeur pour $n = 11$. Que penser de l'affirmation de l'élève ?

Une création de BarroTech

Leçon 3 : récurrence et égalités

Exercice 5 : formules de sommes

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   En déduire que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, puis calculer $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$;
3. $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 6 : le terme général d'une suite récurrente

Partie A. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.
3. En déduire u_{20}.

Partie B. Une médiathèque compte 200 abonnés le 1er janvier 2026. Chaque année, $10\,\%$ des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 50 nouvelles personnes s'abonnent. On note u_n le nombre d'abonnés le 1er janvier de l'année $2026 + n$; ainsi $u_0 = 200$.

Une solution de Barrolech

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 50$, puis calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 500 - 300 \times 0{,}9^n$.
3. Combien la médiathèque comptera-t-elle d'abonnés le 1er janvier 2036 ? Arrondir à l'unité.
4. Montrer que $u_{n+1} - u_n = 30 \times 0{,}9^n$. En déduire le sens de variation de (u_n), puis justifier que le nombre d'abonnés reste toujours inférieur à 500.

Leçon 4 : récurrence et inégalités

Exercice 7 : des inégalités par récurrence

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^n \geq 1 + 2n$:
   a. à l'aide de l'inégalité de Bernoulli ;
   b. directement, par récurrence.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (on lit « factorielle n »), de sorte que $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
   Démontrer par récurrence que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. a. Vérifier que l'inégalité $2^n > 5n$ est fausse pour $n = 1, 2, 3$ et 4.
   b. Démontrer que $2^n > 5n$ pour tout entier $n \geq 5$.

Exercice 8 : l'inégalité de Bernoulli en situation

Un capital de $2\,000$ € est placé à intérêts composés au taux annuel de $4\,\%$. On note C_n le capital au bout de n années.

1. Exprimer C_n en fonction de n. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bernoulli, que $C_n \geq 2\,000 + 80n$ pour tout n.
2. a. À l'aide de la question 1, donner un nombre d'années au bout duquel on est sûr que le capital dépasse $3\,000$ €.
   b. Calculer C_{10} et C_{11} au centime près. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il réellement $3\,000$ € ? Commenter.
3. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1-a)^n \geq 1 - na$.
   b. Une voiture achetée $20\,000$ € perd $15\,\%$ de sa valeur chaque année. Montrer qu'au bout de 4 ans, elle vaut au moins $8\,000$ €. Calculer sa valeur exacte au bout de 4 ans.
   c. Pourquoi cette minoration n'apporte-t-elle plus rien au bout de 7 ans ?

Leçon 5 : suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 9 : encadrer et étudier une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. On note f la fonction définie sur $\left[-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2 (valeur exacte, puis arrondi au centième).
2. Étudier les variations de f. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
4. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 10 : une suite décroissante, et une suite qui oscille

Partie A. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$. On note $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ pour $x > -4$.

1. Vérifier que $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+4}$, et en déduire que f est croissante sur $]-4 ; +\infty[$.
2. Calculer u_1, $f(1)$ et $f(3)$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
4. En déduire le sens de variation de (u_n) et un encadrement de ses termes.

Une solution de Barrolech

Partie B. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{1+v_n}$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5. La suite (v_n) est-elle monotone ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq 1$.