Récurrence et suites

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 1 · CORRIGÉS

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. a. *Terme général d'une suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr$.* $u_n = 7 - 2n$, donc $u_{20} = 7 - 40 = -33$.
   b. *Nombre de termes × (premier + dernier) / 2.* La somme compte 21 termes, de $u_0 = 7$ à $u_{20} = -33$:
   $$S = 21 \times \frac{7 + (-33)}{2} = 21 \times (-13) = -273.$$
2. a. $v_n = 3 \times 2^n$, donc $v_8 = 3 \times 256 = 768$.
   b. $v_0 + \cdots + v_8 = 3\left(1 + 2 + \cdots + 2^8\right) = 3 \times \dfrac{1 - 2^9}{1 - 2} = 3 \times 511 = 1\,533$.
3. Entre w_3 et w_8, on ajoute 5 fois la raison : $26 - 11 = 5r$, donc $r = 3$. Puis $w_0 = w_3 - 3r = 11 - 9 = 2$, d'où $w_n = 2 + 3n$ et $w_{100} = 302$.
4. $1 + 2 + \cdots + 50 = \dfrac{50 \times 51}{2} = 1\,275$.
   Avec $q = \dfrac{1}{2}$ et $n = 10$: $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2\,048}\right) = 2 - \dfrac{1}{1\,024} = \dfrac{2\,047}{1\,024}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

Partie A

1. Avec A, on ajoute 600 € chaque année : (a_n) est arithmétique de raison 600 et $a_n = 24\,000 + 600n$.
   Avec B, on multiplie par $1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$ chaque année : (b_n) est géométrique de raison $1{,}025$ et $b_n = 24\,000 \times 1{,}025^n$.
2. $a_1 = 24\,600$ et $b_1 = 24\,000 \times 1{,}025 = 24\,600$: les deux propositions donnent le même salaire en 2027.
   $a_{10} = 24\,000 + 6\,000 = 30\,000$ € et $b_{10} = 24\,000 \times 1{,}025^{10} \approx 30\,722{,}03$ €.
3. De 2026 à 2036, il y a 11 années (n de 0 à 10).
   - A : $a_0 + \cdots + a_{10} = 11 \times \dfrac{24\,000 + 30\,000}{2} = 297\,000$ €.
   - B, en euros :
   $$b_0 + \cdots + b_{10} = 24\,000 \times \frac{1 - 1{,}025^{11}}{1 - 1{,}025} = 24\,000 \times \frac{1{,}025^{11} - 1}{0{,}025} \approx 299\,603{,}19.$$

   La proposition B rapporte environ $2\,603{,}19$ € de plus sur la période : elle est la plus avantageuse.

Partie B

1. $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 9(n+1) + 1 - 2n^2 + 9n - 1 = 4n - 7$.
   Pour $n = 0$ et $n = 1$, $4n - 7 < 0$; pour $n \geq 2$, $4n - 7 > 0$. Les premiers termes sont 1, -6, -9, -8 : la suite décroît jusqu'au rang 2, puis elle est **strictement croissante à partir du rang** 2.
2. (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 5 > 0$ et de raison $0{,}8$, avec $0 < 0{,}8 < 1$: elle est **strictement décroissante**. *Vérification :* $v_{n+1} - v_n = 5 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1) = -0{,}2\, v_n < 0$.
3. $w_n = f(n)$ avec $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$. On a $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante et (w_n) **est strictement croissante** ($w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = \frac{7}{3}$…).

Exercice 3

Pour une divisibilité par d, on traduit l'hypothèse de récurrence par « il existe un entier k tel que … $= dk$ ».

1. On note $\mathcal{P}(n)$: « $7^n - 1$ est divisible par 6 ».
   - *Initialisation.* $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$.
   - *Hérédité.* Supposons $7^n - 1 = 6k$ avec k entier. Alors $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 7 \times 6k + 6 = 6(7k + 1)$, multiple de 6.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
2. On note $\mathcal{P}(n)$: « $n^3 - n$ est divisible par 3 ».
   - *Initialisation.* $0^3 - 0 = 0$, divisible par 3.
   - *Hérédité.* Supposons $n^3 - n = 3k$. On développe : $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n) = 3\left(k + n^2 + n\right)$, multiple de 3.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
3. On note $\mathcal{P}(n)$: « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 ».
   - *Initialisation.* $3^0 - 2^0 = 0$, divisible par 7.
   - *Hérédité.* Supposons $3^{2n} - 2^n = 7k$, donc $3^{2n} = 7k + 2^n$. Alors
     $$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 9(7k + 2^n) - 2 \times 2^n = 63k + 7 \times 2^n = 7\left(9k + 2^n\right),$$
     qui est un multiple de 7.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 4

1. a. Supposons $6^n + 1 = 5k$ avec k entier. Alors $6^{n+1} + 1 = 6 \times 6^n + 1 = 6(6^n + 1) - 5 = 30k - 5 = 5(6k - 1)$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La propriété est **héréditaire**.
   b. $6^0 + 1 = 2$, qui n'est pas divisible par 5 : $\mathcal{P}(0)$ est **fausse**.
   c. *Initialisation* : $6^0 - 1 = 0$. *Hérédité* : si $6^n - 1 = 5k$, alors $6^{n+1} - 1 = 6(6^n - 1) + 5 = 5(6k + 1)$. Donc $6^n - 1$ est divisible par 5 pour tout n.
   Alors $6^n + 1 = (6^n - 1) + 2$ a pour reste 2 dans la division par 5 : $\mathcal{P}(n)$ **est fausse pour tout** n.
   Une propriété héréditaire peut donc être toujours fausse : l'initialisation est indispensable.

Une solution de BarroTech

2. a. Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, on obtient $11, 13, 17, 23, 31$, tous premiers.
b. Pour $n = 11$: $11^2 - 11 + 11 = 121 = 11 \times 11$, qui **n'est pas premier**. L'affirmation est fausse : vérifier dix cas ne démontrait rien. Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation « pour tout n » est fausse.

Exercice 5

Pour une somme, le rang $n+1$ s'obtient en ajoutant un seul terme au rang n.

1. *Initialisation* ($n = 1$) : $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.
Hérédité : si $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

qui est la formule au rang $n+1$. *Conclusion* : vraie pour tout $n \geq 1$.

2. *Initialisation* ($n = 1$) : $\dfrac{1 \times 4}{4} = 1 = 1^3$.
Hérédité : si $1^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, on ajoute $(n+1)^3$ et on met $(n+1)^2$ en facteur :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

qui est la formule au rang $n+1$. *Conclusion* : vraie pour tout $n \geq 1$.
Comme $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, on a bien $1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$.
Pour $n = 10$: $1^3 + \cdots + 10^3 = 55^2 = 3\,025$.

Une solution de BarroTech

3. *Initialisation* ($n = 1$) : $\dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$.
Hérédité : si la somme vaut $\dfrac{n}{n+1}$ au rang n, on ajoute le terme $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

car $n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. *Conclusion* : vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6

Partie A

1. $u_1 = 2 + 0 + 3 = 5$, $u_2 = 5 + 2 + 3 = 10$, $u_3 = 10 + 4 + 3 = 17$, $u_4 = 17 + 6 + 3 = 26$.

2. Les termes $2, 5, 10, 17, 26$ sont les carrés $1, 4, 9, 16, 25$ augmentés de 1 : on conjecture $u_n = (n+1)^2 + 1$.

- *Initialisation* : $(0+1)^2 + 1 = 2 = u_0$.
- *Hérédité* : si $u_n = (n+1)^2 + 1$, alors $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 5 = (n+2)^2 + 1$, qui est la formule au rang $n+1$.
- *Conclusion* : pour tout n, $u_n = (n+1)^2 + 1$.

3. $u_{20} = 21^2 + 1 = 442$.

Partie B

1. Perdre $10\,\%$ des abonnés revient à multiplier par $0{,}9$, puis on ajoute les 50 nouveaux : $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 50$.
   $u_1 = 0{,}9 \times 200 + 50 = 230$ et $u_2 = 0{,}9 \times 230 + 50 = 257$.
2. On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 500 - 300 \times 0{,}9^n$ ».
   - *Initialisation* : $500 - 300 \times 1 = 200 = u_0$.
   - *Hérédité* : si $u_n = 500 - 300 \times 0{,}9^n$, alors
     $$u_{n+1} = 0{,}9\,(500 - 300 \times 0{,}9^n) + 50 = 450 - 300 \times 0{,}9^{n+1} + 50 = 500 - 300 \times 0{,}9^{n+1}.$$
   - *Conclusion* : la formule est vraie pour tout n.
3. Le 1er janvier 2036 correspond à $n = 10$: $u_{10} = 500 - 300 \times 0{,}9^{10} \approx 395{,}4$, soit environ 395 **abonnés**.
4. $u_{n+1} - u_n = -300 \times 0{,}9^{n+1} + 300 \times 0{,}9^n = 300 \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) = 30 \times 0{,}9^n > 0$: la suite est **strictement croissante**.
   Et $300 \times 0{,}9^n > 0$, donc $u_n = 500 - 300 \times 0{,}9^n < 500$ pour tout n : le nombre d'abonnés augmente, mais reste toujours inférieur à 500.

Exercice 7

1. a. Avec $a = 2 > 0$, l'inégalité de Bernoulli donne $(1+2)^n \geq 1 + 2n$, soit $3^n \geq 1 + 2n$.
   b. *Initialisation* : $3^0 = 1 \geq 1$. *Hérédité* : si $3^n \geq 1 + 2n$, on multiplie par $3 > 0$: $3^{n+1} \geq 3 + 6n$. Or $3 + 6n - \big(1 + 2(n+1)\big) = 4n \geq 0$, donc $3^{n+1} \geq 3 + 6n \geq 1 + 2(n+1)$. *Conclusion* : vraie pour tout n.
2. *Initialisation* ($n = 1$) : $1! = 1$ et $2^0 = 1$.
   Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $n! \geq 2^{n-1}$. On multiplie par $n + 1 > 0$: $(n+1)! = (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$. Comme $n \geq 1$, $n + 1 \geq 2$, donc $(n+1) \times 2^{n-1} \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$. Ainsi $(n+1)! \geq 2^n$.
   Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$.
3. a. $2 < 5$, $4 < 10$, $8 < 15$, $16 < 20$: l'inégalité est fausse pour $n = 1, 2, 3, 4$.
   b. *Initialisation* ($n = 5$) : $2^5 = 32 > 25$.
   Hérédité : soit $n \geq 5$ tel que $2^n > 5n$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 10n$. Or $10n - 5(n+1) = 5(n-1) \geq 0$ car $n \geq 1$. Donc $2^{n+1} > 10n \geq 5(n+1)$.
   Conclusion : pour tout $n \geq 5$, $2^n > 5n$.

Exercice 8

1. Le capital est multiplié par $1{,}04$ chaque année : $C_n = 2\,000 \times 1{,}04^n$. Avec $a = 0{,}04$, l'inégalité de Bernoulli donne $1{,}04^n \geq 1 + 0{,}04n$, et en multipliant par $2\,000 > 0$: $C_n \geq 2\,000 + 80n$.

2. a. $2\,000 + 80n \geq 3\,000 \iff n \geq 12{,}5$. Au bout de 13 **ans**, on est sûr que $C_n \geq 2\,000 + 80 \times 13 = 3\,040 > 3\,000$.

b. $C_{10} \approx 2\,960{,}49$ € et $C_{11} \approx 3\,078{,}91$ €. Le capital dépasse réellement $3\,000$ € **dès la onzième année**. L'inégalité de Bernoulli donne une garantie, pas la meilleure valeur : la minoration $2\,000 + 80n$ correspond aux intérêts simples, toujours inférieurs aux intérêts composés.

3. a. On note $\mathcal{P}(n)$: « $(1-a)^n \geq 1 - na$ ».

- *Initialisation* : $(1-a)^0 = 1 = 1 - 0 \times a$.
- *Hérédité* : si $(1-a)^n \geq 1 - na$, on multiplie par $1 - a$, **strictement positif** car $a < 1$:

$$(1-a)^{n+1} \geq (1-na)(1-a) = 1 - (n+1)a + na^2 \geq 1 - (n+1)a,$$

car $na^2 \geq 0$.

- *Conclusion* : vraie pour tout n.

b. La valeur au bout de n ans est $V_n = 20\,000 \times 0{,}85^n$. Avec $a = 0{,}15$: $V_4 \geq 20\,000 \times (1 - 4 \times 0{,}15) = 20\,000 \times 0{,}4 = 8\,000$ €. Valeur exacte : $V_4 = 20\,000 \times 0{,}85^4 = 10\,440{,}125$ €, soit environ $10\,440$ €.

c. Pour $n = 7$, $1 - 7 \times 0{,}15 = -0{,}05 < 0$: la minoration dit seulement que la valeur est supérieure à un nombre négatif, ce qu'on savait déjà.

Exercice 9

1. $u_1 = \sqrt{0 + 4} = 2$ et $u_2 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

2. Sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$, f est la composée de $x \mapsto 3x + 4$, croissante et positive, et de la racine carrée, croissante : f est **croissante**. *Autre méthode : pour $x > -\frac{4}{3}$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}} > 0$.*

$f(0) = 2$ et $f(4) = \sqrt{16} = 4$.

3. On note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ».

- *Initialisation* : $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, donc $0 \leq 0 \leq 2 \leq 4$.
- *Hérédité* : supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$. Ces nombres sont dans $[0\,;4]$, où f est croissante, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$. Comme $0 \leq 2$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : pour tout n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

4. La suite (u_n) est **croissante** (car $u_n \leq u_{n+1}$) et **bornée** : $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout n. *Remarque : 4 est la solution positive de $f(x) = x$, car $\sqrt{3 \times 4 + 4} = 4$.*

Exercice 10

Partie A

1. $2 - \dfrac{5}{x+4} = \dfrac{2(x+4)-5}{x+4} = \dfrac{2x+3}{x+4} = f(x)$.
   Sur $]-4\,;+\infty[$, $x \mapsto x+4$ est croissante et strictement positive, donc $x \mapsto \dfrac{5}{x+4}$ est décroissante, et $x \mapsto -\dfrac{5}{x+4}$ est croissante : f **est croissante**. *Autre méthode :* $f'(x) = \dfrac{5}{(x+4)^2} > 0$.
2. $u_1 = f(3) = \dfrac{9}{7} \approx 1{,}29$ et $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$.
3. On note $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ ».
   - *Initialisation* : $1 \leq \frac{9}{7} \leq 3 \leq 3$.
   - *Hérédité* : supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$. Comme f est croissante sur $[1\,;3]$, $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$, soit $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{7}$, et $\frac{9}{7} \leq 3$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : pour tout n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
4. La suite est **décroissante** et, pour tout n, $1 \leq u_n \leq 3$: elle est **bornée** (minorée par 1, majorée par $u_0 = 3$).

Partie B

Une solution de BarroTech

1. $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{2}{3}$, $v_4 = \frac{3}{5}$, $v_5 = \frac{5}{8}$. Comme $v_1 > v_0$ mais $v_2 < v_1$, la suite **n'est pas monotone** : ses termes montent et descendent tour à tour. Ici, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est décroissante.
2. *Initialisation* : $0 \leq v_0 = 0 \leq 1$.
   Hérédité : si $0 \leq v_n \leq 1$, alors $1 \leq 1 + v_n \leq 2$, et la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+v_n} \leq 1$. Donc $0 \leq v_{n+1} \leq 1$.
   Conclusion : pour tout n, $0 \leq v_n \leq 1$. On peut encadrer une suite même quand elle n'est pas monotone.