Variables aléatoires réelles

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée, sauf les programmes des leçons 8 et 9.

Leçon 1 : variable aléatoire

Exercice 1 : les lecteurs d'une bibliothèque

La bibliothèque d'un village tire au sort, parmi six lecteurs, celui qui gagnera un abonnement. On note X le nombre de livres empruntés ce mois-ci par le lecteur tiré au sort.

Lecteur	Ana	Bilal	Chloé	Driss	Emma	Farid
Livres empruntés	2	0	3	2	1	2

1. Donner l'univers Ω et son cardinal.
2. Expliquer pourquoi X est une variable aléatoire réelle. Donner $X(\text{Chloé})$ et $X(\text{Bilal})$.
3. Lister les valeurs prises par X.
4. Quelles issues réalisent l'évènement $\{X = 2\}$? Et l'évènement $\{X \leq 1\}$?
5. La bibliothèque offre un livre au gagnant. On note $Y = X + 1$. Donner $Y(\text{Emma})$, puis les valeurs prises par Y.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : modéliser

Pour chaque situation, dire si la grandeur étudiée est une variable aléatoire réelle. Si oui, décrire l'univers et donner les valeurs possibles.

- **a.** On lance deux dés équilibrés à quatre faces, et on note S la somme des deux résultats.
- **b.** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, et on note sa couleur : cœur, carreau, trèfle ou pique.
- **c.** Avec le même tirage, on pose $N = 1$ si la carte est un as, et $N = 0$ sinon.
- **d.** On lance trois pièces, et on note F le nombre de « face ».

Dans la situation a, quelles issues donnent $S = 3$? Quelles issues donnent $S = 8$?

Leçon 2 : notations et loi de probabilité

Exercice 3 : compléter et lire une loi

Une variable aléatoire X suit la loi suivante.

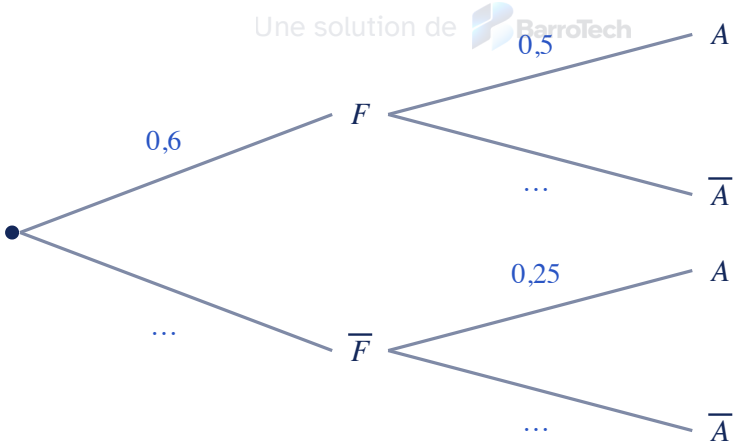
x_i	-2	0	1	3
$P(X = x_i)$	$0{,}1$	a	$0{,}3$	$0{,}2$

1. Calculer a.
2. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(X < 1)$ et $P(X \leq 1)$.
3. En déduire $P(X > 0)$ avec l'évènement contraire.
4. Que vaut $P(X = 2)$? Que vaut $P(-2 \leq X \leq 1)$?
5. Traduire par un évènement : « X est au moins égale à 1 » ; « X est strictement négative ». Donner leurs probabilités.

Exercice 4 : un salon de thé

Dans un salon de thé, $60\,\%$ des clients prennent la formule à 10 euros, et les autres celle à 6 euros. Parmi les clients de la formule à 10 euros, $50\,\%$ ajoutent une pâtisserie à 3 euros. Parmi ceux de la formule à 6 euros, $25\,\%$ l'ajoutent. On choisit un client au hasard. On note F : « il prend la formule à 10 euros », A : « il ajoute une pâtisserie », et X le montant de son addition, en euros.

Une solution de BarroTech



1. Compléter l'arbre.
2. Lister les valeurs de X et déterminer sa loi. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer $P(X \geq 10)$ et $P(X \leq 9)$. Interpréter le premier résultat par une phrase.
4. On sait que l'addition dépasse 6 euros. Quelle est la probabilité qu'elle soit de 13 euros ?

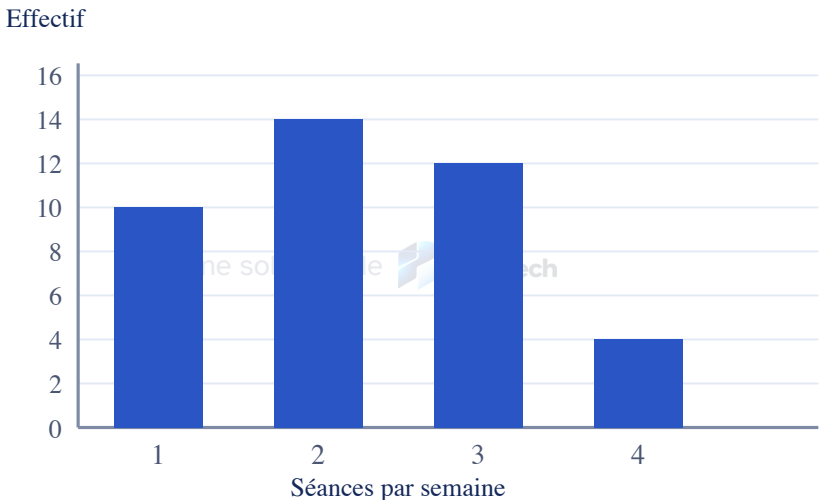
Leçon 3 : espérance, lien avec la moyenne

Exercice 5 : calculer des espérances

1. Calculer l'espérance de chaque variable.
   - **a.** X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 avec les probabilités $0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$, $0{,}4$.
   - **b.** Y prend les valeurs -5, 0, 10 avec les probabilités $0{,}5$, $0{,}3$, $0{,}2$.
   - **c.** Z est le résultat d'un dé équilibré à quatre faces.
2. Une variable T prend les valeurs 0, 1 et b avec les probabilités $0{,}5$, $0{,}3$ et $0{,}2$. Trouver b pour que $E(T) = 2$.
3. Une élève affirme : « Comme $E(Z) = 2{,}5$, le dé peut donner $2{,}5$. » Expliquer son erreur.

Exercice 6 : un club de badminton

Le diagramme suivant donne le nombre de séances par semaine des 40 adhérents d'un club de badminton.



1. Lire les effectifs sur le diagramme, puis calculer la moyenne, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série.
2. On tire au sort un adhérent, et on note X son nombre de séances. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$ et comparer avec la moyenne.
4. Calculer $P(X \geq 3)$. Que représente ce nombre pour le club ?
5. Parmi les adhérents qui viennent au moins deux fois par semaine, quelle est la proportion de ceux qui viennent quatre fois ? Écrire ce résultat comme une probabilité conditionnelle.

Leçon 4 : variance et écart type

Exercice 7 : par la définition

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de chaque variable, en utilisant la définition de la variance.

1. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec les probabilités $0{,}4$, $0{,}3$, $0{,}2$, $0{,}1$.
2. Y prend les valeurs 0, 2, 4 avec les probabilités $0{,}6$, $0{,}2$, $0{,}2$.
3. Z prend les valeurs -1 et 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chacune.
4. T prend la seule valeur 7 avec la probabilité 1.

Exercice 8 : deux fournisseurs

Un pâtissier compare les délais de livraison de deux fournisseurs de farine. Le délai A du premier vaut 2 ou 4 jours, avec la probabilité $0{,}5$ pour chaque valeur. Le délai B du second vaut 1 jour avec la probabilité $0{,}8$, et 11 jours avec la probabilité $0{,}2$.

1. Calculer $E(A)$ et $E(B)$. Quelle conclusion peut-on tirer de ces deux nombres seuls ?
2. Calculer $V(A)$, $\sigma(A)$, $V(B)$ et $\sigma(B)$.
3. Le pâtissier ne peut pas attendre plus de 4 jours. Calculer $P(A > 4)$ et $P(B > 4)$. Quel fournisseur lui conseiller ? Justifier avec les écarts types.

Une solution de BarroTech

Leçon 5 : linéarité de l'espérance

Exercice 9 : sans refaire la loi

1. On sait que $E(X) = 12$. Calculer $E(2X)$, $E(X + 5)$, $E(3X - 4)$, $E(-X)$ et $E\left(\dfrac{1}{2}X + 1\right)$.
2. Dans une ville, la température de midi C, en degrés Celsius, a pour espérance 15 sur l'année. En degrés Fahrenheit, elle vaut $F = 1{,}8\,C + 32$. Calculer $E(F)$.
3. On sait que $E(X) = 4$ et $E(aX + 3) = 11$. Trouver a.
4. On sait que $E(X) = 3$ et $E(Y) = -2$. Calculer $E(X + Y)$ et $E(2X + Y)$.
5. Vrai ou faux : « Pour toute variable X, $E(X^2) = E(X)^2$. » Justifier avec une variable qui vaut 0 ou 2, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chaque valeur.

Exercice 10 : un stand de crêpes

Une association tient un stand de crêpes pendant cinq samedis. On choisit l'un de ces samedis au hasard. On note X le nombre de crêpes vendues et Y le nombre de boissons vendues.

Samedi	1	2	3	4	5
X	30	40	30	50	50
Y	20	30	40	30	30

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.
2. Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.
3. Écrire les valeurs de $X+Y$ pour chaque samedi, déterminer sa loi, et vérifier que $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$.
4. Une crêpe rapporte 3 euros, une boisson 2 euros, et chaque samedi coûte 30 euros de frais. Le bénéfice est $B = 3X + 2Y - 30$. Calculer $E(B)$.

Leçon 6 : formule de König-Huygens

Exercice 11 : calculer avec la formule

1. X prend les valeurs 0, 5, 20 avec les probabilités $0{,}7$, $0{,}2$, $0{,}1$. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Y prend les valeurs 0, 2, 6 avec les probabilités $0{,}5$, $0{,}4$, $0{,}1$. Calculer $E(Y)$, $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. On lance deux pièces et on note Z le nombre de « pile ». Calculer $V(Z)$.
4. On sait que $E(T) = 5$ et $V(T) = 9$. Calculer $E(T^2)$.
5. Un camarade annonce $E(U) = 3$ et $E(U^2) = 8$. Pourquoi est-ce impossible ?

Exercice 12 : la variance et le second degré

Une variable Z vaut 1 avec la probabilité p, et 0 avec la probabilité $1-p$, où p appartient à $[0\,;1]$.

1. Calculer $E(Z)$ et $E(Z^2)$. En déduire que $V(Z) = p(1-p)$.
2. Étudier le signe de $p(1-p)$ sur $[0\,;1]$. Pour quelles valeurs de p la variance est-elle nulle ? Interpréter.
3. Vérifier que $p(1-p) = \dfrac{1}{4} - \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2$. En déduire la plus grande valeur possible de $V(Z)$, et la valeur de p qui la donne.
4. Résoudre l'équation $V(Z) = 0{,}16$. Que remarque-t-on sur les deux solutions ?
5. En déduire que $\sigma(Z)$ ne dépasse jamais $0{,}5$.

Leçon 7 : utiliser l'espérance

Exercice 13 : le jeu de dé de la brocante

À une brocante, un jeu coûte 3 euros. On lance un dé équilibré à six faces. Le 6 rapporte 9 euros, le 4 ou le 5 rapporte 3 euros, et les autres faces ne rapportent rien. On note X la somme reçue et G le gain net.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $E(G)$. Le jeu est-il équitable, favorable ou défavorable au joueur ?
4. Sur 200 parties, combien le stand peut-il espérer gagner environ ?
5. Quelle mise rendrait le jeu équitable ?
6. La mise reste de 3 euros. Quelle somme a faudrait-il offrir pour le 6 afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 14 : une extension de garantie

À l'achat d'un lave-linge, un vendeur propose une extension de garantie à 20 euros. Sans elle, une panne a lieu avec la probabilité $0{,}1$ et coûte 150 euros de réparation. On note C le coût, sans extension.

1. Donner la loi de C et calculer $E(C)$.
2. Calculer $V(C)$ avec la formule de König-Huygens, puis $\sigma(C)$.
3. Avec l'extension, le coût vaut 20 euros, quoi qu'il arrive. Quels sont alors son espérance et son écart type ?
4. Pour le vendeur, le gain sur une extension vendue est $20 - C$. Calculer son espérance. Combien peut-il espérer gagner environ sur $1\,000$ extensions vendues ?
5. À quel prix l'extension serait-elle équitable ?
6. Donner un argument pour acheter l'extension, et un argument contre.

Une solution de BarroTech

Leçon 8 : Python, espérance, variance, écart type

Exercice 15 : lire un programme

On considère la fonction suivante.

```
def mystere(valeurs, probas):
    s = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        s = s + probas[i] * valeurs[i] ** 2
    return s
```

1. On appelle `mystere([1, 2, 4], [0.5, 0.25, 0.25])`. Que vaut `len(valeurs)` ?
2. Donner la valeur de `s` après chaque passage dans la boucle.
3. Quelle quantité cette fonction calcule-t-elle ?
4. Calculer à la main l'espérance et la variance de cette variable, avec la formule de König-Huygens.
5. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie $P(X \leq a)$, puis donner la valeur de `proba_inf([1, 2, 4], [0.5, 0.25, 0.25], 2)`.

```
def proba_inf(valeurs, probas, a):
    s = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        if ... :
            s = s + ...
    return s
```

Une solution de BarroTech

Exercice 16 : écrire des fonctions

On dispose de la fonction `esperance` du cours.

1. Écrire une fonction `gain_moyen(valeurs, probas, mise)` qui renvoie l'espérance du gain net.
2. Écrire une fonction `equitable(valeurs, probas, mise)` qui renvoie `True` si le jeu est équitable, en arrondissant le gain moyen à 9 décimales.
3. Tester ces fonctions sur le jeu de l'exercice 13, avec les mises `3` et `2.5`.
4. Une série de n nombres est rangée dans une liste `serie`. On tire au sort un de ces nombres, avec équiprobabilité. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie l'espérance de ce nombre. Quelle quantité statistique retrouve-t-on ? Donner le résultat pour `[12, 8, 15, 9, 6]`.

```
def esperance_serie(serie):
    n = len(serie)
    probas = [... for x in serie]
    return esperance(serie, probas)
```

Leçon 9 : Python, fréquence des lettres d'un texte

Exercice 17 : un mot, à la main

On utilise les fonctions `nb_occurrences` et `frequences` du cours avec `texte = "abracadabra"`.

1. Que renvoie `nb_occurrences("a", texte)` ? Et `nb_occurrences("z", texte)` ?
2. Donner l'effectif de chaque lettre du mot, et le nombre total de lettres.
3. On tire au hasard une lettre du mot. Quelle est la probabilité d'obtenir « a » ? Et « r » ?
4. On pose $X = 1$ si la lettre tirée est « a » et $X = 0$ sinon. Calculer $E(X)$.
5. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la lettre la plus fréquente d'un texte.

```
def plus_frequente(texte):
    f = frequences(texte)
    i_max = 0
    for i in range(26):
        if ... :
            i_max = i
    return alphabet[i_max]
```

Exercice 18 : un message codé

Un message français, en minuscules et sans accents, a été codé par décalage : chaque lettre est remplacée par celle qui se trouve k rangs plus loin dans l'alphabet, en revenant à « a » après « z ». Le message codé est le suivant.

Une solution de Barrotech

```
xqh yduldeoh dohdwrluh hvw xqh irqfwlrq ghilqlh vxu xq xqlyhuv hooh dvvrflh xq qrpeuh d fkdtxh lvvxh
```

La fonction `plus_frequente` de l'exercice 17 renvoie « h » pour ce message.

1. La lettre la plus fréquente en français est en général « e ». En déduire une valeur probable du décalage k.
2. Décoder à la main les deux premiers mots.
3. Voici la fonction de décalage. Quel appel permet de décoder tout le message ?

```
def decale(texte, k):
    resultat = ""
    for c in texte:
        if c in alphabet:
            i = alphabet.index(c)
            resultat = resultat + alphabet[(i + k) % 26]
        else:
            resultat = resultat + c
    return resultat
```

4. Pourquoi cette méthode peut-elle échouer sur un message de quelques mots seulement ?