Variables aléatoires réelles

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. L'univers est $\Omega = \{\text{Ana} ; \text{Bilal} ; \text{Chloé} ; \text{Driss} ; \text{Emma} ; \text{Farid}\}$, et $\text{Card}(\Omega) = 6$.
2. À chaque lecteur, donc à chaque issue, le tableau associe un seul nombre réel : X est une fonction définie sur Ω, à valeurs réelles. C'est donc une variable aléatoire réelle. On lit $X(\text{Chloé}) = 3$ et $X(\text{Bilal}) = 0$.
3. Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.
4. $\{X = 2\} = \{\text{Ana} ; \text{Driss} ; \text{Farid}\}$ et $\{X \leq 1\} = \{\text{Bilal} ; \text{Emma}\}$.
5. $Y(\text{Emma}) = X(\text{Emma}) + 1 = 2$. Les valeurs prises par Y sont 1, 2, 3 et 4.

Exercice 2

- **a.** S est une variable aléatoire réelle. L'univers est l'ensemble des $4 \times 4 = 16$ couples de résultats, et S prend les valeurs entières de 2 à 8.
- **b.** La couleur n'est pas un nombre : ce n'est pas une variable aléatoire réelle.
- **c.** N est une variable aléatoire réelle. L'univers est l'ensemble des 32 cartes, et N prend les valeurs 0 et 1.
- **d.** F est une variable aléatoire réelle. L'univers compte $2^3 = 8$ issues, et F prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

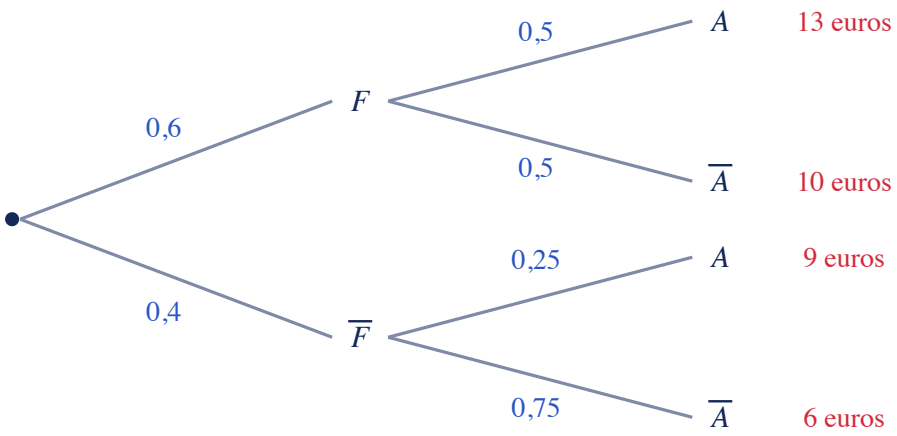
Dans la situation a, $S = 3$ est réalisé par les couples $(1 ; 2)$ et $(2 ; 1)$, et $S = 8$ seulement par le couple $(4 ; 4)$.

Exercice 3

1. La somme des probabilités vaut 1, donc $a = 1 - (0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2) = 0{,}4$.
2. $P(X \leq 0) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. L'évènement $\{X < 1\}$ contient les mêmes issues, car X ne prend aucune valeur entre 0 et 1 : $P(X < 1) = 0{,}5$. Enfin, $P(X \leq 1) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$.
3. Le contraire de $\{X \leq 0\}$ est $\{X > 0\}$, donc $P(X > 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
4. X ne prend pas la valeur 2, donc $P(X = 2) = 0$. De plus, $P(-2 \leq X \leq 1) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8$.
5. « X est au moins égale à 1 » s'écrit $\{X \geq 1\}$, de probabilité $0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$. « X est strictement négative » s'écrit $\{X < 0\}$, de probabilité $0{,}1$.

Exercice 4

1. L'arbre complet est le suivant.



2. Les valeurs de X sont 13, 10, 9 et 6. On multiplie le long de chaque chemin.

x_i	6	9	10	13
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,3

En effet, $P(X = 13) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$, $P(X = 10) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$, $P(X = 9) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$ et $P(X = 6) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$. La somme vaut 1.

3. $P(X \geq 10) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$ et $P(X \leq 9) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$. Ainsi, $60\,\%$ des additions atteignent au moins 10 euros.

4. On cherche $P_{\{X>6\}}(X = 13)$. Or $P(X > 6) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, donc cette probabilité vaut $\dfrac{0{,}3}{0{,}7} = \dfrac{3}{7}$.

Exercice 5

1. a. $E(X) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + 1{,}6 = 3$.

b. $E(Y) = -2{,}5 + 0 + 2 = -0{,}5$.

c. Les quatre faces sont équiprobables, donc $E(Z) = \dfrac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2{,}5$.

2. On a $E(T) = 0{,}3 + 0{,}2\,b$. L'équation $0{,}3 + 0{,}2\,b = 2$ donne $0{,}2\,b = 1{,}7$, donc $b = 8{,}5$.

3. L'espérance n'est pas forcément une valeur prise par la variable. C'est une valeur moyenne : sur un très grand nombre de lancers, la moyenne des résultats est proche de $2{,}5$, mais aucun lancer ne donne $2{,}5$.

Exercice 6

1. On lit les effectifs 10, 14, 12 et 4, de total 40. La moyenne vaut $\dfrac{10\times 1+14\times 2+12\times 3+4\times 4}{40}=\dfrac{90}{40}=2{,}25$. Dans la série ordonnée, les vingtième et vingt et unième valeurs valent 2, donc la médiane vaut 2. La dixième valeur donne $Q_1=1$, et la trentième donne $Q_3=3$.
2. On divise les effectifs par 40.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$0{,}25$	$0{,}35$	$0{,}3$	$0{,}1$

3. $E(X)=0{,}25+0{,}7+0{,}9+0{,}4=2{,}25$: c'est la moyenne de la série.
4. $P(X\geq 3)=0{,}3+0{,}1=0{,}4$: c'est la proportion des adhérents qui viennent au moins trois fois par semaine, soit $40\,\%$.
5. Les adhérents qui viennent au moins deux fois sont au nombre de 30. Parmi eux, 4 viennent quatre fois, soit une proportion de $\dfrac{4}{30}=\dfrac{2}{15}$. Avec les probabilités, $P_{\{X\geq 2\}}(X=4)=\dfrac{0{,}1}{0{,}75}=\dfrac{2}{15}$.

Exercice 7

1. $E(X)=0{,}3+0{,}4+0{,}3=1$. Les écarts à 1 valent -1, 0, 1 et 2. Donc $V(X)=0{,}4\times 1+0{,}3\times 0+0{,}2\times 1+0{,}1\times 4=1$ et $\sigma(X)=1$.
2. $E(Y)=0{,}4+0{,}8=1{,}2$. Les écarts à $1{,}2$ valent $-1{,}2$, $0{,}8$ et $2{,}8$. Donc $V(Y)=0{,}6\times 1{,}44+0{,}2\times 0{,}64+0{,}2\times 7{,}84=0{,}864+0{,}128+1{,}568=2{,}56$ et $\sigma(Y)=1{,}6$.
3. $E(Z)=0$, et les deux écarts ont pour carré 1. Donc $V(Z)=1$ et $\sigma(Z)=1$.
4. $E(T)=7$, et le seul écart est nul. Donc $V(T)=0$ et $\sigma(T)=0$: une variable constante n'a aucune dispersion.

Exercice 8

1. $E(A)=0{,}5\times 2+0{,}5\times 4=3$ et $E(B)=0{,}8\times 1+0{,}2\times 11=3$. Les deux délais ont la même espérance, 3 jours : ces deux nombres ne permettent pas de départager les fournisseurs.
2. $V(A)=0{,}5\times 1+0{,}5\times 1=1$, donc $\sigma(A)=1$. Ensuite, $V(B)=0{,}8\times 4+0{,}2\times 64=3{,}2+12{,}8=16$, donc $\sigma(B)=4$.
3. $P(A>4)=0$ et $P(B>4)=0{,}2$. Avec le premier fournisseur, le délai n'est jamais trop long, alors qu'avec le second, il l'est une fois sur cinq. Pour la même espérance, l'écart type du premier est quatre fois plus petit : il faut conseiller le premier fournisseur.

Exercice 9

1. Par linéarité, $E(2X) = 24$, $E(X+5) = 17$, $E(3X-4) = 3 \times 12 - 4 = 32$, $E(-X) = -12$ et $E\left(\frac{1}{2}X + 1\right) = 7$.
2. $E(F) = 1{,}8 \times 15 + 32 = 27 + 32 = 59$.
3. On a $E(aX+3) = 4a + 3$. L'équation $4a + 3 = 11$ donne $a = 2$.
4. $E(X+Y) = 3 + (-2) = 1$ et $E(2X+Y) = 2 \times 3 + (-2) = 4$.
5. C'est faux. La variable proposée a pour espérance 1, donc $E(X)^2 = 1$. Mais X^2 vaut 0 ou 4, donc $E(X^2) = 2$.

Exercice 10

1. X vaut 30 avec la probabilité $0{,}4$, 40 avec la probabilité $0{,}2$ et 50 avec la probabilité $0{,}4$. Donc $E(X) = 12 + 8 + 20 = 40$.
2. Y vaut 20 avec la probabilité $0{,}2$, 30 avec la probabilité $0{,}6$ et 40 avec la probabilité $0{,}2$. Donc $E(Y) = 4 + 18 + 8 = 30$.
3. Les valeurs de $X+Y$ sont, dans l'ordre, 50, 70, 70, 80 et 80. Donc $X+Y$ vaut 50 avec la probabilité $0{,}2$, 70 avec la probabilité $0{,}4$ et 80 avec la probabilité $0{,}4$. Ainsi, $E(X+Y) = 10 + 28 + 32 = 70$, et on a bien $40 + 30 = 70$.
4. Par linéarité, $E(B) = 3\,E(X) + 2\,E(Y) - 30 = 120 + 60 - 30 = 150$. Le bénéfice moyen est de 150 euros par samedi.

Une solution de Barrolech

Exercice 11

1. $E(X) = 1 + 2 = 3$ et $E(X^2) = 0{,}2 \times 25 + 0{,}1 \times 400 = 5 + 40 = 45$. Donc $V(X) = 45 - 9 = 36$ et $\sigma(X) = 6$.
2. $E(Y) = 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}4$ et $E(Y^2) = 0{,}4 \times 4 + 0{,}1 \times 36 = 1{,}6 + 3{,}6 = 5{,}2$. Donc $V(Y) = 5{,}2 - 1{,}96 = 3{,}24$ et $\sigma(Y) = 1{,}8$.
3. Z prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Donc $E(Z) = 1$, $E(Z^2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et $V(Z) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
4. La formule s'écrit $E(T^2) = V(T) + E(T)^2$, donc $E(T^2) = 9 + 25 = 34$.
5. On aurait $V(U) = 8 - 9 = -1$. Or une variance est toujours positive ou nulle : ces nombres sont impossibles.

Exercice 12

1. $E(Z) = (1-p)\times 0 + p \times 1 = p$. De plus, $Z^2 = Z$, car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, donc $E(Z^2) = p$. La formule de König-Huygens donne $V(Z) = p - p^2 = p(1-p)$.
2. Sur $[0\,;1]$, les facteurs p et $1-p$ sont positifs ou nuls, donc $p(1-p) \geq 0$. Ce produit s'annule pour $p = 0$ et pour $p = 1$. Dans ces deux cas, Z est constante : le résultat est certain, et il n'y a aucune dispersion.
3. En développant, $\frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - p^2 + p - \frac{1}{4} = p - p^2 = p(1-p)$. Un carré est positif ou nul, donc $V(Z) \leq \frac{1}{4}$, avec égalité pour $p = \frac{1}{2}$. La plus grande variance vaut $\frac{1}{4}$.
4. L'équation s'écrit $p^2 - p + 0{,}16 = 0$. Son discriminant vaut $1 - 0{,}64 = 0{,}36$, donc $p = \frac{1-0{,}6}{2} = 0{,}2$ ou $p = \frac{1+0{,}6}{2} = 0{,}8$. Ces deux solutions ont pour somme 1 : échanger le succès et l'échec ne change pas la variance.
5. $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} \leq \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5$.

Exercice 13

1. Les six faces sont équiprobables.

x_i	0	3	9
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Une solution de BarroTech

2. $E(X) = 0 + 1 + \frac{9}{6} = 2{,}5$.
3. $G = X - 3$, donc $E(G) = 2{,}5 - 3 = -0{,}5$. L'espérance est strictement négative : le jeu est défavorable au joueur.
4. En moyenne, le stand gagne $0{,}5$ euro par partie, soit environ $200 \times 0{,}5 = 100$ euros sur 200 parties.
5. Le jeu est équitable lorsque la mise est égale à $E(X)$, soit $2{,}5$ euros.
6. On a alors $E(X) = 1 + \frac{a}{6}$. L'équation $1 + \frac{a}{6} = 3$ donne $a = 12$. Il faudrait offrir 12 euros pour le 6.

Exercice 14

1. C vaut 0 avec la probabilité $0{,}9$ et 150 avec la probabilité $0{,}1$. Donc $E(C) = 15$.
2. $E(C^2) = 0{,}1 \times 22\,500 = 2\,250$, donc $V(C) = 2\,250 - 225 = 2\,025$ et $\sigma(C) = 45$.
3. Le coût ne prend qu'une seule valeur : son espérance vaut 20 euros et son écart type vaut 0.
4. Par linéarité, $E(20 - C) = 20 - 15 = 5$. Le vendeur peut espérer gagner environ $1\,000 \times 5 = 5\,000$ euros sur $1\,000$ extensions.
5. Elle serait équitable au prix de 15 euros, l'espérance du coût.
6. Pour : l'extension supprime le risque d'une dépense de 150 euros, et l'écart type passe de 45 à 0. Contre : elle coûte en moyenne 5 euros de plus que les réparations.

Exercice 15

1. `len(valeurs)` vaut 3.
2. Après chaque passage, `s` vaut successivement $0{,}5$, puis $1{,}5$, puis $5{,}5$.
3. La fonction calcule $p_1 x_1^2 + \cdots + p_n x_n^2$, c'est-à-dire $E(X^2)$.
4. $E(X) = 0{,}5 + 0{,}5 + 1 = 2$ et $E(X^2) = 5{,}5$. Donc $V(X) = 5{,}5 - 4 = 1{,}5$.
5. On ajoute la probabilité seulement si la valeur est inférieure ou égale à a. Le résultat vaut $0{,}75$.

```
def proba_inf(valeurs, probas, a):
    s = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        if valeurs[i] <= a:
            s = s + probas[i]
    return s
```

Une solution de BarroTech

Exercice 16

1. et 2. Le gain net a pour espérance $E(X) - m$.

```
def gain_moyen(valeurs, probas, mise):
    return esperance(valeurs, probas) - mise


def equitable(valeurs, probas, mise):
    return round(gain_moyen(valeurs, probas, mise), 9) == 0
```

3. Avec `valeurs = [0, 3, 9]` et `probas = [1/2, 1/3, 1/6]`, la mise `3` donne un gain moyen de $-0{,}5$ et `False`, et la mise `2.5` donne un gain moyen de 0 et `True`.
4. Chaque nombre a pour probabilité $\dfrac{1}{n}$. La ligne à compléter est `probas = [1 / n for x in serie]`. On retrouve la **moyenne** de la série. Pour `[12, 8, 15, 9, 6]`, on obtient $\dfrac{50}{5} = 10$.

Exercice 17

1. `nb_occurrences("a", texte)` renvoie 5, et `nb_occurrences("z", texte)` renvoie 0.
2. Le mot compte 5 « a », 2 « b », 1 « c », 1 « d » et 2 « r », soit 11 lettres.
3. La probabilité d'obtenir « a » vaut $\frac{5}{11}$, et celle d'obtenir « r » vaut $\frac{2}{11}$.
4. X vaut 1 avec la probabilité $\frac{5}{11}$ et 0 sinon, donc $E(X) = \frac{5}{11}$. L'espérance est ici la fréquence de la lettre.
5. La condition est `f[i] > f[i_max]`, et la fonction renvoie « a » pour ce mot.

```
def plus_frequente(texte):
    f = frequences(texte)
    i_max = 0
    for i in range(26):
        if f[i] > f[i_max]:
            i_max = i
    return alphabet[i_max]
```

Exercice 18

1. Si « h » code « e », le décalage va de la cinquième à la huitième lettre de l'alphabet, donc $k = 3$.
2. On recule chaque lettre de trois rangs. Le mot « xqh » devient « une », et le mot « yduldeoh » devient « variable ».
3. L'appel `decale(code, -3)` décode tout le message. Il donne : « une variable aleatoire est une fonction definie sur un univers elle associe un nombre a chaque issue ». Le résultat a du sens, ce qui confirme l'hypothèse.
4. Sur quelques mots, les fréquences sont très irrégulières : la lettre la plus fréquente peut ne pas être le code de « e ». La méthode repose sur une tendance, qui n'apparaît que sur un texte assez long.