Fonction exponentielle

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée, sauf ce qui est confié à Python. Les valeurs approchées utiles sont données dans les énoncés.

Leçon 1 : définition de la fonction exponentielle

Exercice 1 : utiliser la définition

1. Donner les valeurs de $\exp(0)$ et de $\exp'(0)$.
2. Dériver chaque fonction, et factoriser le résultat quand c'est possible.
   - **a.** $f_1(x) = 2\exp(x) - 3x$ sur $\mathbb{R}$
   - **b.** $f_2(x) = x^2\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$
   - **c.** $f_3(x) = (x-2)\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$
   - **d.** $f_4(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f_3 au point d'abscisse 0.
4. À l'aide de la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 0, donner une valeur approchée de $\exp(0{,}02)$ et de $\exp(-0{,}03)$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : égale à sa dérivée ?

1. Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, dire si elle vérifie $f' = f$, puis si elle vérifie $f(0) = 1$.
   - **a.** $x \mapsto 1 + x$
   - **b.** $x \mapsto 3\exp(x)$
   - **c.** $x \mapsto \exp(x) + x$
2. Soit $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.
   - **a.** Calculer $P'(x)$, puis $P(x) - P'(x)$.
   - **b.** Calculer $P(1)$ sous forme de fraction. Comparer à $\exp(1) \approx 2{,}718$.
3. Expliquer pourquoi la fonction $\exp$ n'est pas une fonction polynôme.
4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 5$. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{5}$. Montrer que $g' = g$ et $g(0) = 1$, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

Leçon 2 : construire l'exponentielle par la méthode d'Euler

Exercice 3 : la méthode d'Euler à la main

1. Avec un pas $h = 0{,}5$, calculer les valeurs approchées de $\exp(0{,}5)$, $\exp(1)$, $\exp(1{,}5)$ et $\exp(2)$ données par la méthode d'Euler.
2. On donne $\exp(2) \approx 7{,}39$. Calculer l'écart avec la valeur trouvée.
3. Avec un pas $h = -0{,}5$, calculer les valeurs approchées de $\exp(-0{,}5)$ et $\exp(-1)$. On donne $\exp(-1) \approx 0{,}37$: comparer.
4. Avec un pas $h = 0{,}2$, combien de pas faut-il pour atteindre $x = 1$? Écrire le résultat sous la forme d'une puissance, puis le calculer. *On donne* $1{,}2^2 = 1{,}44$ *et* $1{,}44^2 = 2{,}0736$.

Exercice 4 : la méthode d'Euler en Python

On reprend la fonction du cours.

```
def euler(h, n):
    y = 1
    Y = [y]
    for i in range(n):
        y = y + h * y
        Y.append(y)
    return Y
```

Une solution de BarroTech

1. Quelle liste renvoie `euler(0.5, 3)` ?
2. Avec un pas de $0{,}01$, combien de pas faut-il pour atteindre $x = 3$? Écrire l'instruction qui affiche la valeur approchée de $\exp(3)$.
3. On cherche maintenant la fonction g telle que $g' = 2g$ et $g(0) = 1$.
   - **a.** Montrer qu'un pas h multiplie la valeur par $1 + 2h$.
   - **b.** Quelle ligne du programme faut-il changer, et comment ?
   - **c.** Quelle liste obtient-on alors avec un pas de $0{,}5$ et 2 pas ?
4. Le tableau donne les valeurs approchées de $\exp(1)$ obtenues. On prend $\exp(1) \approx 2{,}7183$.

Pas h	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$
Valeur	$2{,}5937$	$2{,}7048$	$2{,}7169$

Calculer les trois écarts. Que semble-t-il se passer quand le pas est divisé par 10 ?

Leçon 3 : relation fondamentale et nombre e

Exercice 5 : utiliser la relation fondamentale

1. Écrire chaque produit sous la forme $\exp(\dots)$, puis avec la notation e si c'est plus simple.
   - **a.** $\exp(3)\exp(4)$
   - **b.** $\exp(-2)\exp(2)$
   - **c.** $\exp(1{,}5)\exp(0{,}5)$
   - **d.** $\exp(x)\exp(1-x)$
   - **e.** $\exp(x+1)\exp(x-1)$
2. On pose $A = \mathrm{e}^{x}$. Exprimer en fonction de A : e^{x+1}, e^{-x} et e^{2x}.
3. Montrer que, pour tout réel x, $\exp(2x) = \exp(x)^2$ et $\exp(3x) = \exp(x)^3$.
4. Un élève affirme qu'il existe un réel a tel que $\exp(a) = 0$. Montrer par un raisonnement par l'absurde qu'il a tort.

Exercice 6 : des valeurs approchées sans calculatrice

On donne $\mathrm{e} \approx 2{,}72$, $\mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}65$ et $\mathrm{e}^{0{,}1} \approx 1{,}105$. En utilisant uniquement ces valeurs, donner une valeur approchée au centième de :

1. $\mathrm{e}^{0{,}6}$;
2. $\mathrm{e}^{1{,}5}$;
3. $\mathrm{e}^{-0{,}5}$;
4. $\mathrm{e}^{0{,}2}$.
5. Que donne la tangente au point d'abscisse 0 pour $\mathrm{e}^{0{,}1}$? Calculer l'écart avec $1{,}105$.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : transformer une expression

Exercice 7 : simplifier, développer, factoriser

1. Écrire sous la forme e^n, avec n entier.
   - **a.** $\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-7}$
   - **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^3}$
   - **c.** $\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^4$
   - **d.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}}$
   - **e.** $\dfrac{\left(\mathrm{e}^3\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^5}$
2. Simplifier, pour tout réel x.
   - **a.** $\mathrm{e}^{x+3} \times \mathrm{e}^{-x}$
   - **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x}$
   - **c.** $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 \times \mathrm{e}^{1-x}$
   - **d.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$
3. Développer et réduire.
   - **a.** $\left(\mathrm{e}^x - 2\right)^2$
   - **b.** $\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$
   - **c.** $\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
4. Factoriser.
   - **a.** $3\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$
   - **b.** $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x$
   - **c.** $\mathrm{e}^{2x} - 9$

Une solution de BarroTech

Exercice 8 : démontrer une égalité

1. Montrer que, pour tout réel x :
   - **a.** $\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = 4$;
   - **b.** $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$;
   - **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.
2. Vrai ou faux, pour tout réel x ? Justifier par une règle du cours ou par un contre-exemple.
   - **a.** $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$
   - **b.** $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$
   - **c.** $\left(\mathrm{e}^x\right)^3 = \mathrm{e}^{x^3}$
   - **d.** $\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^x$
3. Soient $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que f est impaire et que g est paire.

Leçon 5 : signe, sens de variation et courbe

Exercice 9 : équations et inéquations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{x+3}$
   - **b.** $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{4}$
   - **c.** $\mathrm{e}^{x^2-3} = \mathrm{e}^{2x}$
   - **d.** $\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x+1} = 1$
   - **e.** $\mathrm{e}^{x} = -1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** $\mathrm{e}^{3x-6} \geq 1$
   - **b.** $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}$
   - **c.** $\mathrm{e}^{x^2} \leq \mathrm{e}^{x}$
   - **d.** $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^{x+2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.
   - **a.** $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 4 = 0$
   - **b.** $\mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e})\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e} = 0$

Exercice 10 : études de fonctions

Une solution de BarroTech

1. Soit $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Montrer que $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x}$.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de f, sans valeur aux extrémités. Préciser son minimum.
   - **c.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
2. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}\,x$ sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Étudier le signe de $g'(x)$, puis les variations de g.
   - **b.** En déduire que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} \geq \mathrm{e}\,x$. Interpréter sur la courbe de $\exp$.
3. On admet du cours que $\mathrm{e}^{x} \geq x+1$ pour tout réel x.
   - **a.** En remplaçant x par $-x$, montrer que $\mathrm{e}^{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x < 1$.
   - **b.** En déduire un encadrement de $\mathrm{e}^{0{,}1}$ par deux fractions simples.

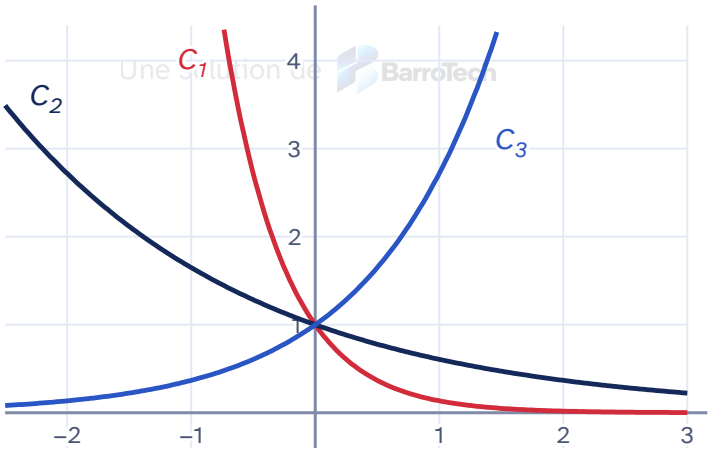
Leçon 6 : la fonction t ↦ exp(at)

Exercice 11 : dériver

1. Dériver chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** $f_1(t) = \mathrm{e}^{5t}$
   - **b.** $f_2(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}$
   - **c.** $f_3(t) = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$
   - **d.** $f_4(t) = t\mathrm{e}^{2t}$
   - **e.** $f_5(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-t}$
   - **f.** $f_6(t) = \mathrm{e}^{2t+1}$ (on pourra écrire $f_6(t) = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2t}$)
2. Donner le sens de variation de f_2. Dresser le tableau de variations de f_5 et préciser son maximum.
3. Étudier le signe de $f_3'(t)$. En déduire que, pour tout réel t, $\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \geq 2$.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f_4 au point d'abscisse 0.

Exercice 12 : des courbes

Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentent les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$, dans un ordre à retrouver.



1. Associer chaque courbe à sa fonction, en justifiant.
2. Dresser un tableau de valeurs de $t \mapsto \mathrm{e}^{0{,}5t}$ pour $t = -2$, 0 et 2, avec $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ et $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$. Comment se déduit de cette courbe celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5t}$?
3. Résoudre $\mathrm{e}^{2t} \geq \mathrm{e}^{t}$. Interpréter sur les courbes de ces deux fonctions.
4. Soit $k > 0$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ au point d'abscisse 0. Montrer qu'elle coupe l'axe des abscisses en $t = \dfrac{1}{k}$.

Leçon 7 : lien avec les suites géométriques

Exercice 13 : des suites géométriques

1. Soit $u_n = \mathrm{e}^{2n}$. Montrer que (u_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme, puis son sens de variation.
2. Soit $v_n = 3\mathrm{e}^{-0{,}5n}$. Mêmes questions. Que semblent devenir ses termes quand n devient grand ?
3. Soit $w_n = \mathrm{e}^{1-n}$. Mêmes questions.
4. Pour n entier naturel, soit $S_n = 1 + \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} + \cdots + \mathrm{e}^{-n}$.
   - **a.** Montrer que $S_n = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.
   - **b.** De quel nombre S_n semble-t-il se rapprocher quand n devient grand ? En donner une valeur approchée avec $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$.

Exercice 14 : deux placements, deux modèles

On place 2000 euros. On donne $1{,}02^{10} \approx 1{,}219$, $\mathrm{e}^{0{,}02} \approx 1{,}0202$ et $\mathrm{e}^{0{,}2} \approx 1{,}221$.

Placement A : intérêts de $2\,\%$ versés une fois par an. Le capital au bout de n années est noté u_n.

Placement B : intérêts versés en continu. Le capital à l'instant t, en années, est $f(t) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}02t}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer une valeur approchée de u_{10}.
2. Calculer une valeur approchée de $f(10)$, puis l'écart entre les deux placements.
3. Montrer que $f(t+1) = f(t) \times \mathrm{e}^{0{,}02}$. Quelle est la hausse annuelle du placement B, en pourcentage ?
4. Une population d'oiseaux augmente de $5\,\%$ par an. On veut la modéliser par $t \mapsto P_0\,\mathrm{e}^{kt}$. On donne $\mathrm{e}^{0{,}05} \approx 1{,}0513$ et $\mathrm{e}^{0{,}049} \approx 1{,}0502$. Laquelle des deux valeurs $0{,}05$ et $0{,}049$ convient le mieux pour k ?

Leçon 8 : modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle

Exercice 15 : la pression en montagne

La pression de l'air, en hectopascals, à l'altitude h, en kilomètres, est modélisée par $P(h) = 1013\,\mathrm{e}^{-0{,}12h}$.

On donne $\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}55$ *et* $\mathrm{e}^{-0{,}69} \approx 0{,}5$.

1. Calculer $P(0)$ et interpréter.
2. Calculer $P'(h)$. Montrer que $P'(h) = -0{,}12\,P(h)$. Quel est le sens de variation de P ?
3. Une alpiniste atteint un sommet à 5 kilomètres d'altitude. Calculer une valeur approchée de la pression.
4. À quelle altitude la pression est-elle divisée par deux ?
5. Montrer que le rapport $\dfrac{P(h+1)}{P(h)}$ ne dépend pas de h. Traduire ce résultat par une phrase.

Exercice 16 : une tisane qui refroidit

Une tisane est versée dans une tasse, dans une pièce à 20 degrés. Sa température, en degrés, après t minutes, est modélisée par $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$, $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}14$ *et* $\mathrm{e}^{-0{,}85} \approx 0{,}43$.

1. Calculer $T(0)$ et interpréter.
2. Calculer $T'(t)$ et en déduire le sens de variation de T. Pourquoi la température reste-t-elle au-dessus de 20 degrés ?
3. Calculer des valeurs approchées de $T(10)$ et de $T(20)$.
4. On boit la tisane à 50 degrés. Montrer que l'on cherche t tel que $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \dfrac{3}{7}$, puis donner une valeur approchée de t.
5. Soit $D(t) = T(t) - 20$. Montrer que $D' = -0{,}1\,D$. Que représente $D(t)$?
6. Que fait ce programme ? Quel nombre affiche-t-il, sachant que $T(8) \approx 51{,}5$ et $T(9) \approx 48{,}5$?

```
from math import exp
t = 0
while 20 + 70 * exp(-0.1 * t) > 50:
    t = t + 1
print(t)
```

Leçon 9 : valeur approchée de e avec Python

Une solution de Barotech

Exercice 17 : la suite de terme général (1 + 1/n)ⁿ

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions.
2. Expliquer pourquoi u_n est la valeur approchée de $\exp(1)$ donnée par la méthode d'Euler avec un pas de $\dfrac{1}{n}$.
3. Une banque verse les intérêts chaque jour, soit 365 fois par an, avec un taux annuel de $100\,\%$. Python donne `u(365)` $\approx 2{,}7146$. Que vaut, au centime près, un euro placé un an ? Combien gagne-t-on par rapport à un versement unique ?
4. On reprend la fonction `seuil` du cours. Sachant que `seuil(0.001)` renvoie `1359`, que signifie ce nombre ?
5. Pourquoi `u(10**16)` affiche-t-il `1.0` ?

Exercice 18 : un encadrement de e

On utilise l'inégalité du cours : pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq x+1$. Soit n un entier, $n \geq 1$.

1. En prenant $x = \dfrac{1}{n}$, montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$.
2. En prenant $x = -\dfrac{1}{n+1}$, montrer que $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leq 1+\dfrac{1}{n}$, puis que $\mathrm{e} \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
3. Donner l'encadrement obtenu pour $n=1$, puis pour $n=2$.
4. On écrit le programme suivant. Il affiche `2.7169239322355936 2.7196408561678287`. Quel encadrement de e en déduit-on, et quelle est son amplitude, au millième près ?

```
n = 1000
print((1 + 1 / n) ** n, (1 + 1 / n) ** (n + 1))
```

Une solution de BarroTech