Fonction exponentielle

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. Par définition, $\exp(0) = 1$. Comme $\exp' = \exp$, on a aussi $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.
2. **a.** $f_1'(x) = 2\exp(x) - 3$.

   b. C'est un produit : $f_2'(x) = 2x\exp(x) + x^2\exp(x) = x(x+2)\exp(x)$.

   c. C'est un produit : $f_3'(x) = 1 \times \exp(x) + (x-2)\exp(x) = (x-1)\exp(x)$.

   d. C'est un quotient : $f_4'(x) = \dfrac{\exp(x) \times x - \exp(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{(x-1)\exp(x)}{x^2}$.
3. On a $f_3(0) = -2$ et $f_3'(0) = -1$. La tangente a pour équation $y = f_3(0) + f_3'(0)(x-0)$, soit $y = -x - 2$.
4. Pour h proche de 0, $\exp(h) \approx 1 + h$. Donc $\exp(0{,}02) \approx 1{,}02$ et $\exp(-0{,}03) \approx 0{,}97$.

Exercice 2

1. **a.** La dérivée de $x \mapsto 1 + x$ est constante et égale à 1 : elle n'est pas égale à la fonction, donc $f' = f$ est faux. En revanche, la fonction vaut 1 en 0.

   b. La dérivée de $x \mapsto 3\exp(x)$ est $x \mapsto 3\exp(x)$: on a bien $f' = f$. Mais la fonction vaut 3 en 0 : la seconde condition est fausse.

   c. La dérivée de $x \mapsto \exp(x) + x$ est $x \mapsto \exp(x) + 1$: $f' = f$ est faux. La fonction vaut 1 en 0.
2. **a.** $P'(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, donc $P(x) - P'(x) = \dfrac{x^3}{6}$. La fonction P est presque égale à sa dérivée lorsque x est proche de 0.

   b. $P(1) = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}667$. Cette valeur est déjà proche de $\exp(1) \approx 2{,}718$.
3. Supposons que $\exp$ soit une fonction polynôme. Elle n'est pas nulle, car $\exp(0) = 1$. Sa dérivée aurait alors un degré de moins, donc elle serait différente de $\exp$. Or $\exp' = \exp$. La fonction $\exp$ n'est donc pas une fonction polynôme.
4. On a $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{5} = \dfrac{f(x)}{5} = g(x)$, et $g(0) = \dfrac{f(0)}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$. La fonction g vérifie les deux conditions de la définition : comme la fonction exponentielle est l'unique fonction qui les vérifie, $g = \exp$. Donc, pour tout réel x, $f(x) = 5\exp(x)$.

Exercice 3

1. *Chaque pas multiplie la valeur par* $1 + h = 1{,}5$. On obtient successivement $1 \times 1{,}5 = 1{,}5$, puis $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$, puis $2{,}25 \times 1{,}5 = 3{,}375$, puis $3{,}375 \times 1{,}5 = 5{,}0625$. Ainsi $\exp(0{,}5) \approx 1{,}5$, $\exp(1) \approx 2{,}25$, $\exp(1{,}5) \approx 3{,}375$ et $\exp(2) \approx 5{,}0625$.
2. L'écart vaut $7{,}39 - 5{,}0625 = 2{,}3275$. L'approximation est grossière, car le pas est grand.
3. Chaque pas multiplie par $1 + h = 0{,}5$. On obtient $\exp(-0{,}5) \approx 0{,}5$ et $\exp(-1) \approx 0{,}25$. Cette valeur est inférieure à $0{,}37$: là aussi, le pas est trop grand.
4. Il faut 5 pas, car $5 \times 0{,}2 = 1$. Chaque pas multiplie par $1{,}2$, donc $\exp(1) \approx 1{,}2^5$. Or $1{,}2^5 = 1{,}2 \times 1{,}2^4 = 1{,}2 \times 2{,}0736 = 2{,}48832$.

Exercice 4

1. La fonction renvoie la liste `[1, 1.5, 2.25, 3.375]`.
2. Il faut 300 pas, car $300 \times 0{,}01 = 3$. L'instruction est `print(euler(0.01, 300)[300])`.
3. **a.** Pour h proche de 0, $g(x + h) \approx g(x) + h\,g'(x) = g(x) + 2h\,g(x) = (1 + 2h)\,g(x)$.

   b. On remplace la ligne `y = y + h * y` par `y = y + 2 * h * y`.

   c. Avec un pas de $0{,}5$, chaque pas multiplie par $1 + 2 \times 0{,}5 = 2$. On obtient la liste $1, 2, 4$.
4. Les écarts valent $2{,}7183 - 2{,}5937 = 0{,}1246$, puis $2{,}7183 - 2{,}7048 = 0{,}0135$, puis $2{,}7183 - 2{,}7169 = 0{,}0014$. Quand le pas est divisé par 10, l'écart semble divisé par 10 environ.

Une solution de BarroTech

Exercice 5

1. **a.** $\exp(3)\exp(4) = \exp(3 + 4) = \exp(7) = \mathrm{e}^7$.

   b. $\exp(-2)\exp(2) = \exp(0) = 1$.

   c. $\exp(1{,}5)\exp(0{,}5) = \exp(2) = \mathrm{e}^2$.

   d. $\exp(x)\exp(1 - x) = \exp(x + 1 - x) = \exp(1) = \mathrm{e}$.

   e. $\exp(x + 1)\exp(x - 1) = \exp(2x)$.
2. On a $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e} = \mathrm{e}\,A$, puis $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{A}$, et $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = A^2$.
3. Avec $y = x$ dans la relation fondamentale, $\exp(2x) = \exp(x + x) = \exp(x)\exp(x) = \exp(x)^2$. Puis $\exp(3x) = \exp(2x + x) = \exp(2x)\exp(x) = \exp(x)^3$.
4. Supposons qu'il existe un réel a tel que $\exp(a) = 0$. Alors $\exp(a)\exp(-a) = 0$. Or, pour tout réel x , $\exp(x)\exp(-x) = 1$, donc ce produit vaut 1. On aboutit à $0 = 1$, ce qui est absurde. Un tel réel a n'existe donc pas.

Exercice 6

1. $e^{0,6} = e^{0,5} \times e^{0,1} \approx 1,65 \times 1,105 \approx 1,82$.
2. $e^{1,5} = e \times e^{0,5} \approx 2,72 \times 1,65 \approx 4,49$.
3. $e^{-0,5} = \dfrac{1}{e^{0,5}} \approx \dfrac{1}{1,65} \approx 0,61$.
4. $e^{0,2} = e^{0,1} \times e^{0,1} \approx 1,105 \times 1,105 \approx 1,22$.
5. La tangente donne $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 = 1,1$. L'écart avec $1,105$ vaut $0,005$.

Exercice 7

1. **a.** $e^4 \times e^{-7} = e^{-3}$.
   b. $\dfrac{e^{-2}}{e^3} = e^{-2-3} = e^{-5}$.
   c. $\left(e^{-1}\right)^4 = e^{-4}$.
   d. $\dfrac{e^2}{e^{-3} \times e} = \dfrac{e^2}{e^{-2}} = e^4$.
   e. $\dfrac{\left(e^3\right)^2 \times e^{-2}}{e^5} = e^{6-2-5} = e^{-1}$.
2. **a.** $e^{x+3} \times e^{-x} = e^3$.
   b. $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x}$.
   c. $(e^x)^2 \times e^{1-x} = e^{2x+1-x} = e^{x+1}$.
   d. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}} = e^{2x+1-(2x-1)} = e^2$.
3. **a.** $(e^x - 2)^2 = e^{2x} - 4e^x + 4$.
   b. $\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right) = e^{2x} - e^{-2x}$.
   c. $e^x\left(e^x + e^{-x}\right) = e^{2x} + 1$.
4. **a.** $3e^x - xe^x = (3 - x)e^x$.
   b. $e^{2x} + 2e^x = e^x\left(e^x + 2\right)$.
   c. $e^{2x} - 9 = \left(e^x - 3\right)\left(e^x + 3\right)$.

Une solution de BarroTech

Exercice 8

1. **a.** On développe les deux carrés : le premier vaut $\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$ et le second $\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}$. La différence vaut $2 - (-2) = 4$.

   b. On multiplie le haut et le bas de la seconde fraction par e^x : $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. La somme vaut donc $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$.

   c. On multiplie le haut et le bas du second membre par e^x, qui n'est jamais nul : $\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.
2. **a.** Faux. Pour $x = 0$, le premier membre vaut 2 et le second vaut 1. En réalité, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$.

   b. Vrai : c'est la règle du produit.

   c. Faux. Pour $x = 2$, on obtient e^6 et e^8, qui sont différents. En réalité, $(\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{3x}$.

   d. Faux. Pour $x = 0$, on obtient 1 et -1. D'ailleurs, une exponentielle est strictement positive.
3. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. On a $f(-x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x = -f(x)$, donc f est impaire. Et $g(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x = g(x)$, donc g est paire.

Exercice 9

1. *On compare les exposants, car la fonction exponentielle est strictement croissante.*

   a. $2x + 1 = x + 3$ équivaut à $x = 2$. La solution est 2.

   b. $x^2 = 4$: les solutions sont 2 et -2.

   c. $x^2 - 3 = 2x$ équivaut à $x^2 - 2x - 3 = 0$, soit $(x+1)(x-3) = 0$. Les solutions sont -1 et 3.

   d. L'équation s'écrit $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^0$, donc $2x + 1 = 0$. La solution est $-\dfrac{1}{2}$.

   e. Une exponentielle est strictement positive : il n'y a pas de solution.
2. **a.** $3x - 6 \geq 0$, soit $x \geq 2$. L'ensemble des solutions est $[2\,;+\infty[$.

   b. L'inéquation s'écrit $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^1$, donc $-x < 1$, soit $x > -1$. L'ensemble des solutions est $]-1\,;+\infty[$.

   c. $x^2 \leq x$ équivaut à $x(x-1) \leq 0$. Le coefficient de x^2 est positif : l'expression est négative entre les racines. L'ensemble des solutions est $[0\,;1]$.

   d. $2x - 1 > x + 2$, soit $x > 3$. L'ensemble des solutions est $]3\,;+\infty[$.
3. **a.** L'équation devient $X^2 + 3X - 4 = 0$. Le nombre 1 est racine évidente, et le produit des racines vaut -4 : l'autre racine est -4. L'équation $\mathrm{e}^x = 1$ donne $x = 0$, et $\mathrm{e}^x = -4$ n'a pas de solution. La seule solution est 0.

   b. L'équation devient $X^2 - (1+\mathrm{e})X + \mathrm{e} = 0$. La somme des racines vaut $1 + \mathrm{e}$ et leur produit e : les racines sont 1 et e. L'équation $\mathrm{e}^x = 1$ donne $x = 0$, et $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}$ donne $x = 1$. Les solutions sont 0 et 1.

Exercice 10

1. **a.** $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-1)\mathrm{e}^x = (2x+1)\mathrm{e}^x$.

   b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x+1$, qui s'annule en $-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		décroissante	$-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	croissante	

   Le minimum de f vaut $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

   c. On a $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$. La tangente a pour équation $y = x - 1$.

2. **a.** On a $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$. Comme $\exp$ est strictement croissante et $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$, $g'(x)$ est négatif pour $x < 1$, nul en 1, positif pour $x > 1$. La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   b. Le minimum de g vaut $g(1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$. Donc $g(x) \geq 0$, soit $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}\,x$ pour tout réel x. La courbe de $\exp$ reste au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

3. **a.** En remplaçant x par $-x$, on a $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$. Pour $x < 1$, le nombre $1-x$ est strictement positif. Comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, on en déduit, en passant aux inverses de deux nombres strictement positifs, $\mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.

   b. Avec $x = 0{,}1$, on a $1{,}1 \leq \mathrm{e}^{0{,}1} \leq \dfrac{1}{0{,}9}$, soit $\dfrac{11}{10} \leq \mathrm{e}^{0{,}1} \leq \dfrac{10}{9}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 11

1. **a.** $f_1'(t) = 5\mathrm{e}^{5t}$.

   b. $f_2'(t) = 3 \times (-2)\mathrm{e}^{-2t} = -6\mathrm{e}^{-2t}$.

   c. $f_3'(t) = \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}$.

   d. $f_4'(t) = 1 \times \mathrm{e}^{2t} + t \times 2\mathrm{e}^{2t} = (1+2t)\mathrm{e}^{2t}$.

   e. $f_5'(t) = \mathrm{e}^{-t} - (t+1)\mathrm{e}^{-t} = -t\mathrm{e}^{-t}$.

   f. $f_6'(t) = \mathrm{e} \times 2\mathrm{e}^{2t} = 2\mathrm{e}^{2t+1}$.

2. Comme $f_2'(t) < 0$, la fonction f_2 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Pour f_5, comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, $f_5'(t)$ a le signe de $-t$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_5'(t)$		$+$	0	$-$	
f_5		croissante	1	décroissante	

   Le maximum de f_5 vaut $f_5(0) = 1$.

3. On a $f_3'(t) \geq 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^{t} \geq \mathrm{e}^{-t}$, soit $t \geq -t$, c'est-à-dire $t \geq 0$. La fonction f_3 est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Son minimum vaut $f_3(0) = 1+1 = 2$. Ainsi, pour tout réel t, $\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \geq 2$.

4. On a $f_4(0) = 0$ et $f_4'(0) = 1$. La tangente a pour équation $y = t$.

Une solution de BarroTech

Exercice 12

1. La seule courbe croissante est $\mathcal{C}_3$: c'est celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$. Les deux autres sont décroissantes. Au point $(0\,;1)$, la pente de $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ vaut -2 et celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ vaut $-0{,}5$. La courbe la plus raide, $\mathcal{C}_1$, est donc celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$, et $\mathcal{C}_2$ celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

2. Les valeurs sont les suivantes.

t	-2	0	2
$\mathrm{e}^{0{,}5t}$	$\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$	1	$\mathrm{e} \approx 2{,}72$

   La courbe de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ est la symétrique de celle-ci par rapport à l'axe des ordonnées.

3. On compare les exposants : $2t \geq t$ équivaut à $t \geq 0$. L'ensemble des solutions est $[0\,;+\infty[$. La courbe de $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ est au-dessus de celle de $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ pour $t \geq 0$, et en dessous pour $t \leq 0$. Elles se coupent au point $(0\,;1)$.

4. La fonction vaut 1 en 0, et sa dérivée $t \mapsto -k\,\mathrm{e}^{-kt}$ vaut $-k$ en 0. La tangente a pour équation $y = -kt + 1$. Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $-kt + 1 = 0$, soit $t = \dfrac{1}{k}$.

Exercice 13

1. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2n+2} = \mathrm{e}^{2n} \times \mathrm{e}^2 = u_n \times \mathrm{e}^2$. La suite est géométrique, de raison e^2 et de premier terme $u_0 = 1$. Comme $\mathrm{e}^2 > 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement croissante.
2. On a $v_{n+1} = 3\mathrm{e}^{-0{,}5n-0{,}5} = v_n \times \mathrm{e}^{-0{,}5}$. La suite est géométrique, de raison $\mathrm{e}^{-0{,}5}$ et de premier terme $v_0 = 3$. Comme $0 < \mathrm{e}^{-0{,}5} < 1$ et $v_0 > 0$, elle est strictement décroissante. Ses termes semblent se rapprocher de 0.
3. On a $w_{n+1} = \mathrm{e}^{1-n-1} = \mathrm{e}^{1-n} \times \mathrm{e}^{-1} = w_n \times \mathrm{e}^{-1}$. La suite est géométrique, de raison e^{-1} et de premier terme $w_0 = \mathrm{e}$. Elle est strictement décroissante.
4. **a.** S_n est la somme $1 + q + \cdots + q^n$ avec $q = \mathrm{e}^{-1} \neq 1$. Elle vaut donc $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$.

   b. Comme $\mathrm{e}^{-(n+1)}$ semble se rapprocher de 0, S_n semble se rapprocher de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} \approx \dfrac{1}{0{,}63} \approx 1{,}59$.

Exercice 14

1. Chaque année, le capital est multiplié par $1{,}02$. Donc $u_n = 2000 \times 1{,}02^n$, et $u_{10} \approx 2000 \times 1{,}219 = 2438$ euros.
2. On a $f(10) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}2} \approx 2000 \times 1{,}221 = 2442$ euros. L'écart est d'environ 4 euros.
3. $f(t+1) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}02t+0{,}02} = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}02t} \times \mathrm{e}^{0{,}02} = f(t) \times \mathrm{e}^{0{,}02}$. Chaque année, le capital est multiplié par environ $1{,}0202$: la hausse annuelle est d'environ $2{,}02\,\%$.
4. Il faut $\mathrm{e}^k = 1{,}05$. Avec $k = 0{,}05$, l'écart vaut environ $0{,}0013$. Avec $k = 0{,}049$, il vaut environ $0{,}0002$. La valeur $0{,}049$ convient le mieux.

Exercice 15

1. $P(0) = 1013$: la pression vaut 1013 hectopascals au niveau de la mer.
2. $P'(h) = 1013 \times (-0{,}12)\,\mathrm{e}^{-0{,}12h} = -121{,}56\,\mathrm{e}^{-0{,}12h}$, c'est-à-dire $P'(h) = -0{,}12\,P(h)$. Comme $P'(h) < 0$, la fonction P est strictement décroissante : la pression baisse quand l'altitude augmente.
3. $P(5) = 1013\,\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 1013 \times 0{,}55 \approx 557$. La pression au sommet vaut environ 557 hectopascals.
4. On cherche h tel que $\mathrm{e}^{-0{,}12h} = 0{,}5$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}69} \approx 0{,}5$, il faut $0{,}12h \approx 0{,}69$, soit $h \approx 5{,}75$. La pression est divisée par deux à environ $5{,}75$ kilomètres d'altitude.
5. $\dfrac{P(h+1)}{P(h)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}12h-0{,}12}}{\mathrm{e}^{-0{,}12h}} = \mathrm{e}^{-0{,}12}$, qui ne dépend pas de h. Quand on monte d'un kilomètre, la pression est toujours multipliée par le même nombre.

Exercice 16

1. $T(0) = 20 + 70 = 90$: la tisane est versée à 90 degrés.
2. $T'(t) = 70 \times (-0{,}1)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = -7\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Comme $T'(t) < 0$, la fonction T est strictement décroissante : la tisane refroidit. Comme une exponentielle est strictement positive, $70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} > 0$, donc $T(t) > 20$.
3. $T(10) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-1} \approx 20 + 70 \times 0{,}37 = 45{,}9$ degrés, et $T(20) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-2} \approx 20 + 70 \times 0{,}14 = 29{,}8$ degrés.
4. $T(t) = 50$ équivaut à $70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 30$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \dfrac{30}{70} = \dfrac{3}{7}$. Or $\dfrac{3}{7} \approx 0{,}43$ et $\mathrm{e}^{-0{,}85} \approx 0{,}43$. Il faut donc $0{,}1t \approx 0{,}85$, soit $t \approx 8{,}5$. La tisane atteint 50 degrés au bout de 8 minutes et demie environ.
5. $D(t) = 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, donc $D'(t) = -7\mathrm{e}^{-0{,}1t} = -0{,}1\,D(t)$. Le nombre $D(t)$ est l'écart entre la température de la tisane et celle de la pièce : cet écart décroit de façon exponentielle.
6. Le programme augmente t d'une minute tant que la température dépasse 50 degrés. Il affiche le premier nombre entier de minutes pour lequel la température est inférieure ou égale à 50 degrés. Comme $T(8) > 50$ et $T(9) < 50$, il affiche `9`.

Exercice 17

1. $u_1 = 2$, $u_2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ et $u_3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$.
2. Avec un pas $h = \dfrac{1}{n}$, il faut n pas pour atteindre $x = 1$. Chaque pas multiplie la valeur par $1 + h = 1 + \dfrac{1}{n}$, et on part de 1. On obtient donc $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = u_n$.
3. Un euro placé devient environ $2{,}71$ euros. Avec un versement unique, il deviendrait 2 euros : on gagne environ $0{,}71$ euro de plus.
4. Pour les rangs de 1 à 1358, l'écart entre e et u_n est supérieur ou égal à $0{,}001$. Le rang 1359 est le premier pour lequel cet écart est inférieur à $0{,}001$.
5. La machine garde un nombre limité de chiffres. Pour $n = 10^{16}$, le nombre $1 + \dfrac{1}{n}$ est arrondi à 1, et $1^n = 1$. Le résultat affiché est faux : c'est un effet de l'arrondi, et non une propriété de la suite.

Exercice 18

1. Avec $x = \dfrac{1}{n}$, on a $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \dfrac{1}{n}$. Les deux membres sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$: on peut élever à la puissance n. Comme $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n = \mathrm{e}$, on obtient $\mathrm{e} \geq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
2. Avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$, on a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Ces nombres sont strictement positifs : en passant aux inverses, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. En élevant à la puissance $n+1$, on obtient $\mathrm{e} \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
3. Pour $n = 1$: $2 \leq \mathrm{e} \leq 4$. Pour $n = 2$: $\dfrac{9}{4} \leq \mathrm{e} \leq \dfrac{27}{8}$, soit $2{,}25 \leq \mathrm{e} \leq 3{,}375$.
4. On en déduit $2{,}716 \leq \mathrm{e} \leq 2{,}720$, en arrondissant vers l'extérieur. L'amplitude de l'encadrement donné par le programme vaut environ $0{,}003$.

Une solution de BarroTech