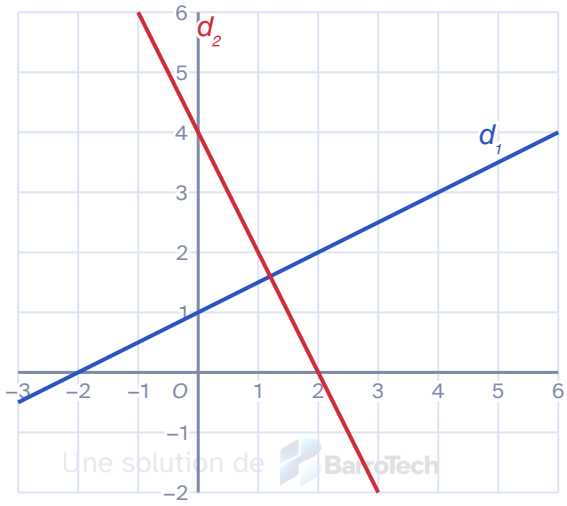
Géométrie repérée

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On pourra utiliser $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Leçon 1 : équation cartésienne et vecteur directeur

Exercice 1 : lire, écrire, tester



1. Sur la figure, lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites d_1 et d_2, puis écrire leurs équations réduites.
2. Donner un vecteur directeur de chaque droite.
   - **a.** $3x - 2y + 6 = 0$
   - **b.** $x + 5y - 1 = 0$
   - **c.** $y = -4x + 1$
   - **d.** $x = 5$
   - **e.** $y = 2$
3. Écrire l'équation réduite de la droite $6x + 3y - 9 = 0$, puis celle de la droite $2x - 5y + 10 = 0$.
4. Soit $d : 2x - 3y + 1 = 0$. Parmi les points $A(1\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(-2\,;-1)$ et $D(5\,;2)$, lesquels sont sur d ?

Exercice 2 : la digue

Sur la carte d'un port, dont l'unité vaut cent mètres, une digue rectiligne va du point $A(-2\,;1)$ au point $B(4\,;4)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis la longueur exacte de la digue. En donner une valeur approchée à la dizaine de mètres près.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
3. Une balise est en $C(8\,;6)$ et une bouée en $E(1\,;3)$. Laquelle se trouve dans le prolongement de la digue ?
4. Calculer les coordonnées des points où la droite (AB) coupe les deux axes.
5. Un poste de secours est placé au milieu de la digue. Donner ses coordonnées.

Leçon 2 : vecteur normal à une droite

Exercice 3 : lire et comparer

1. Donner un vecteur normal à chaque droite.
   - **a.** $4x - 7y + 2 = 0$
   - **b.** $y = 3x - 5$
   - **c.** $y = -\dfrac{1}{4}x + 2$
   - **d.** $x = -2$
   - **e.** $2y = 5$
2. Voici cinq droites : $d_1 : 2x - y + 3 = 0$, $d_2 : 4x - 2y - 1 = 0$, $d_3 : x + 2y - 6 = 0$, $d_4 : y = 2x + 7$ et $d_5 : 3x + 6y + 2 = 0$. Regrouper celles qui sont parallèles entre elles, puis indiquer deux droites perpendiculaires.
3. Soit $d : 2x + my - 1 = 0$ et $d' : 3x - 6y + 2 = 0$, où m est un réel.
   - **a.** Pour quelle valeur de m ces droites sont-elles perpendiculaires ?
   - **b.** Pour quelle valeur de m sont-elles parallèles ?

Une solution de BarroTech

Exercice 4 : le tunnel et le vrai ou faux

1. Soit $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$. À l'aide de vecteurs normaux, démontrer que d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
2. Sur un plan, l'axe d'un tunnel a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + 1$. Une galerie de secours rectiligne part de ce tunnel à angle droit et passe par le point $(0\,;5)$. Écrire son équation réduite.
3. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.
   - **a.** Un vecteur normal à d est un vecteur directeur de toute perpendiculaire à d.
   - **b.** Les droites $2x + 3y = 0$ et $3x + 2y = 0$ sont perpendiculaires.
   - **c.** Le vecteur nul est normal à toute droite.
   - **d.** Deux droites qui ont un vecteur normal commun sont parallèles ou confondues.

Leçon 3 : équation à partir d'un point et d'un vecteur normal

Exercice 5 : écrire des équations

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$.
   - **a.** $A(1\,;2)$, $\vec{n}\,(2\,;5)$
   - **b.** $A(-3\,;0)$, $\vec{n}\,(1\,;-1)$
   - **c.** $A(2\,;-4)$, $\vec{n}\,(0\,;3)$
   - **d.** $A(0\,;0)$, $\vec{n}\,(3\,;-2)$
2. Déterminer une équation de la droite passant par $B(2\,;3)$ et perpendiculaire à la droite $4x - y + 1 = 0$.
3. Déterminer une équation de la droite passant par $C(-1\,;2)$ et parallèle à la droite $3x + 2y - 5 = 0$.
4. Déterminer une équation de la droite passant par $D(2\,;1)$, dirigée par $\vec{u}\,(4\,;-3)$.

Exercice 6 : les casernes et les hauteurs

1. Sur le plan d'un canton, dont l'unité vaut un kilomètre, deux casernes de pompiers sont aux points $A(1\,;1)$ et $B(5\,;3)$. Chaque habitation dépend de la caserne la plus proche.
   - **a.** Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
   - **b.** Une habitation est en $P(2\,;5)$. De quelle caserne dépend-elle ?
   - **c.** Une habitation est en $Q(4\,;0)$. Que remarque-t-on ?
2. Soit le triangle RST, avec $R(-1\,;-1)$, $S(5\,;1)$ et $T(1\,;5)$.
   - **a.** Déterminer une équation de la hauteur issue de T, puis de la hauteur issue de R.
   - **b.** Calculer les coordonnées de leur point d'intersection K.
   - **c.** Vérifier que K est aussi sur la hauteur issue de S.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : projeté orthogonal d'un point sur une droite

Exercice 7 : calculer des projetés

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d, puis la distance de M à d.
   - **a.** $d : x + 3y - 5 = 0$, $M(4\,;7)$
   - **b.** $d : y = 2x - 1$, $M(7\,;3)$
   - **c.** $d : x = 3$, $M(-1\,;4)$
   - **d.** $d : y = -2$, $M(5\,;1)$
2. Soit $d : 2x - y - 1 = 0$ et $M(2\,;3)$. Sans calcul de système, donner le projeté orthogonal de M sur d. Justifier.
3. On reprend la question 1.a. Déterminer les coordonnées du symétrique M' de M par rapport à d.

Exercice 8 : la bretelle d'autoroute

Sur une carte, dont l'unité vaut un kilomètre, une autoroute rectiligne a pour équation $x + y - 10 = 0$. Une commune est au point $C(1\,;3)$ et veut être reliée à l'autoroute par une route droite, la plus courte possible.

1. Expliquer pourquoi cette route aboutit au projeté orthogonal H de C sur l'autoroute.
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à l'autoroute passant par C.
3. Calculer les coordonnées de H.
4. Calculer la longueur exacte de la route, puis une valeur approchée au dixième de kilomètre.
5. La route coûte 5 millions d'euros par kilomètre. Donner un ordre de grandeur de son coût.
6. Deux aires de repos sont sur l'autoroute, en $E(2\,;8)$ et $F(8\,;2)$. Calculer l'aire du triangle CEF.

Leçon 5 : équation d'un cercle

Exercice 9 : écrire et lire

1. Écrire une équation du cercle de centre C et de rayon R.
   - **a.** $C(3\,;-2)$, $R = 4$
   - **b.** $C(0\,;0)$, $R = \sqrt{7}$
   - **c.** $C(-1\,;0)$, $R = \dfrac{1}{2}$
2. Lire le centre et le rayon.
   - **a.** $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 49$
   - **b.** $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 3$
   - **c.** $x^2 + (y-4)^2 = 1$
3. Écrire une équation du cercle de centre $C(1\,;2)$ passant par $A(4\,;-2)$.
4. Soit $E(-3\,;2)$, $F(5\,;-4)$ et $G(4\,;3)$.
   - **a.** Écrire une équation du cercle de diamètre $[EF]$.
   - **b.** Vérifier que G est sur ce cercle.
   - **c.** Vérifier par un produit scalaire que le triangle EGF est rectangle en G.
5. Calculer les ordonnées des points d'abscisse 0 du cercle $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.

Une solution de BarroTech

Exercice 10 : autour d'un monument

Autour d'un monument historique, les travaux sont soumis à un avis particulier dans un rayon de 500 mètres. Le monument est au point $M(2\,;1)$, dans un repère gradué en hectomètres.

1. Écrire une équation du cercle qui borde cette zone.
2. Pour chaque bâtiment, dire s'il est dans la zone, sur son bord ou en dehors : $A(5\,;5)$, $B(6\,;-2)$, $C(-1\,;3)$ et $D(7\,;2)$.
3. Une rue rectiligne suit la droite d'équation $y = 4$.
   - **a.** Montrer qu'un point $(x\,;4)$ de la rue est dans la zone ou sur son bord si et seulement si $(x-2)^2 \leq 16$.
   - **b.** En déduire la longueur de la partie de la rue située dans la zone.

Leçon 6 : reconnaitre une équation de cercle

Exercice 11 : compléter les carrés

1. Montrer que chaque équation est celle d'un cercle, puis donner son centre et son rayon.
   - **a.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
   - **b.** $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$
   - **c.** $x^2 + y^2 - 10y = 0$
   - **d.** $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant chaque équation.
   - **a.** $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
   - **b.** $x^2 + y^2 + 4x + 9 = 0$
   - **c.** $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$
3. Parmi les équations $x^2 + 3y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$, laquelle est celle d'un cercle ?

Exercice 12 : un paramètre et le second degré

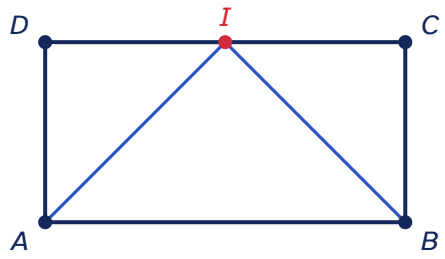
Soit m un réel. On note E_m l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 2m + 7 = 0$.

1. Montrer que l'équation s'écrit $(x-m)^2 + (y+2)^2 = m^2 - 2m - 3$.
2. Factoriser $m^2 - 2m - 3$, puis dresser son tableau de signes.
3. Selon les valeurs de m, préciser la nature de E_m.
4. Donner le centre et le rayon de E_4.
5. Pour quelle valeur de m l'ensemble E_m passe-t-il par l'origine ? Est-ce alors un cercle ?

Une solution de BarroTech

Leçon 7 : utiliser un repère

Exercice 13 : un rectangle



$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = 1$. Le point I est le milieu de $[CD]$. On choisit le repère orthonormé d'origine A, dont l'axe des abscisses est (AB), l'axe des ordonnées (AD), avec AD pour unité.

1. Donner les coordonnées de A, B, C, D et I.
2. Démontrer que les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires.
3. Écrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$, puis vérifier que I est sur ce cercle.
4. La droite (BD) coupe (AI) en P. Calculer les coordonnées de P.
5. On prend maintenant un rectangle quelconque, avec $AB = a$ et $AD = b$, et on garde la même unité sur les deux axes. Déterminer la relation entre a et b pour que (AI) et (BI) soient perpendiculaires.

Exercice 14 : la salle des fêtes

Trois villages sont aux points $A(6\,;4)$, $B(-1\,;5)$ et $C(-2\,;-2)$, l'unité valant un kilomètre. Ils veulent construire une salle des fêtes S à égale distance des trois villages.

1. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$, puis de la médiatrice de $[BC]$.
2. En déduire les coordonnées de S.
3. Calculer la distance SA, puis écrire une équation du cercle de centre S passant par A. Vérifier que ce cercle passe par B et par C.
4. Une route rectiligne passe par A, perpendiculairement au segment $[SA]$. Déterminer une équation de cette route.