Géométrie repérée

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. La droite d_1 coupe l'axe des ordonnées en 1 et monte de 1 quand on avance de 2 : son coefficient directeur est $\frac{1}{2}$ et $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$. La droite d_2 coupe l'axe des ordonnées en 4 et descend de 2 quand on avance de 1 : son coefficient directeur est -2 et $d_2 : y = -2x + 4$.
2. *On utilise $(-b\,;a)$, ou $(1\,;m)$ pour une équation réduite.*

   a. $(2\,;3)$ **b.** $(-5\,;1)$ **c.** $(1\,;-4)$ **d.** $(0\,;1)$ **e.** $(1\,;0)$
3. On isole y. De $3y = -6x + 9$, on tire $y = -2x + 3$. De $5y = 2x + 10$, on tire $y = \frac{2}{5}x + 2$.
4. On remplace les coordonnées. Pour A : $2 - 3 + 1 = 0$. Pour B : $8 - 9 + 1 = 0$. Pour C : $-4 + 3 + 1 = 0$. Pour D : $10 - 6 + 1 = 5 \neq 0$. Les points A, B et C sont sur d, et le point D ne l'est pas.

Exercice 2

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(6\,;3)$, donc $AB = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Avec $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, on obtient $AB \approx 6{,}72$. La digue mesure environ 670 mètres.
2. Le vecteur $(2\,;1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, dirige la droite. Une équation est donc de la forme $x - 2y + c = 0$. Avec A : $-2 - 2 + c = 0$, donc $c = 4$. Ainsi, $(AB) : x - 2y + 4 = 0$.
3. Pour C : $8 - 12 + 4 = 0$, donc C est sur (AB). Pour E : $1 - 6 + 4 = -1 \neq 0$, donc E n'y est pas. La balise est dans le prolongement de la digue, pas la bouée.
4. Si $x = 0$, alors $-2y + 4 = 0$, donc $y = 2$. Si $y = 0$, alors $x = -4$. La droite coupe les axes en $(0\,;2)$ et $(-4\,;0)$.
5. Le milieu de $[AB]$ est le point $\left(1\,;\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 3

1. **a.** $(4\,;-7)$ **b.** $(3\,;-1)$ **c.** $\left(-\dfrac{1}{4}\,;-1\right)$, ou $(1\,;4)$ **d.** $(1\,;0)$ **e.** $(0\,;1)$
2. Les vecteurs normaux sont $\vec{n}_1\,(2\,;-1)$, $\vec{n}_2\,(4\,;-2)$, $\vec{n}_3\,(1\,;2)$, $\vec{n}_4\,(2\,;-1)$ et $\vec{n}_5\,(3\,;6)$. Comme $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$ et $\vec{n}_4 = \vec{n}_1$, les droites d_1, d_2 et d_4 sont parallèles. Comme $\vec{n}_5 = 3\vec{n}_3$, les droites d_3 et d_5 sont parallèles. Enfin, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 - 2 = 0$: par exemple, d_1 et d_3 sont perpendiculaires.
3. Les vecteurs normaux sont $\vec{n}\,(2\,;m)$ et $\vec{n}'\,(3\,;-6)$.

   a. Les droites sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 6 - 6m = 0$, c'est-à-dire si $m = 1$.

   b. Elles sont parallèles si et seulement si le déterminant $2 \times (-6) - 3m$ est nul, c'est-à-dire si $m = -4$.

Exercice 4

1. Les droites $d : mx - y + p = 0$ et $d' : m'x - y + p' = 0$ ont pour vecteurs normaux $\vec{n}\,(m\,;-1)$ et $\vec{n}'\,(m'\,;-1)$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$. Or, $\vec{n} \cdot \vec{n}' = mm' + 1$. Donc d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
2. Le coefficient directeur m' de la galerie vérifie $\dfrac{3}{4}m' = -1$, donc $m' = -\dfrac{4}{3}$. La galerie passe par $(0\,;5)$, donc son ordonnée à l'origine est 5. Son équation réduite est $y = -\dfrac{4}{3}x + 5$.
3. **a.** Vrai. Toute perpendiculaire à d a la direction des vecteurs normaux à d.

   Une solution de BarmTech

   b. Faux. Le produit scalaire de $(2\,;3)$ et de $(3\,;2)$ vaut $6 + 6 = 12 \neq 0$.

   c. Faux. Un vecteur normal est non nul, par définition.

   d. Vrai. Les vecteurs normaux des deux droites sont colinéaires, donc les droites ont la même direction.

Exercice 5

1. *On écrit $ax + by + c = 0$ avec les coordonnées de $\vec{n}$, puis on trouve c avec le point.*

   a. $2x + 5y + c = 0$ et $2 + 10 + c = 0$, donc $2x + 5y - 12 = 0$.

   b. $x - y + c = 0$ et $-3 + c = 0$, donc $x - y + 3 = 0$.

   c. $3y + c = 0$ et $-12 + c = 0$, donc $3y + 12 = 0$, soit $y = -4$.

   d. $3x - 2y + c = 0$ et $c = 0$, donc $3x - 2y = 0$.
2. La droite $4x - y + 1 = 0$ est dirigée par $(1\,;4)$, qui est donc normal à la droite cherchée. Celle-ci a une équation $x + 4y + c = 0$. Avec $B : 2 + 12 + c = 0$, donc $c = -14$. Une équation est $x + 4y - 14 = 0$.
3. Deux droites parallèles ont les mêmes vecteurs normaux. La droite cherchée a une équation $3x + 2y + c = 0$. Avec $C : -3 + 4 + c = 0$, donc $c = -1$. Une équation est $3x + 2y - 1 = 0$.
4. Le vecteur $\vec{n}\,(3\,;4)$ est normal à la droite, car $\vec{n} \cdot \vec{u} = 12 - 12 = 0$. Une équation est de la forme $3x + 4y + c = 0$. Avec $D : 6 + 4 + c = 0$, donc $c = -10$. Une équation est $3x + 4y - 10 = 0$.

Exercice 6

1. **a.** Le milieu de $[AB]$ est $I(3\,;2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$. La médiatrice a une équation $4x+2y+c=0$. Avec I : $12+4+c=0$, donc $c=-16$. En divisant par 2, on obtient $2x+y-8=0$.

   b. On a $PA^2=1+16=17$ et $PB^2=9+4=13$. Comme $PB<PA$, cette habitation dépend de la caserne B.

   c. On a $2\times 4+0-8=0$: le point Q est sur la médiatrice. Il est à la même distance des deux casernes, car $QA^2=QB^2=10$.

2. **a.** Comme $\overrightarrow{RS}\,(6\,;2)$, la hauteur issue de T a une équation $6x+2y+c=0$. Avec T : $6+10+c=0$, donc $c=-16$. En divisant par 2 : $3x+y-8=0$. Comme $\overrightarrow{ST}\,(-4\,;4)$, la hauteur issue de R a une équation $-4x+4y+c=0$. Avec R : $4-4+c=0$, donc $c=0$. En divisant par 4 : $x-y=0$.

   b. La seconde équation donne $y=x$. En remplaçant dans la première : $4x-8=0$, donc $x=2$. Ainsi, $K(2\,;2)$.

   c. Comme $\overrightarrow{RT}\,(2\,;6)$, la hauteur issue de S a une équation $2x+6y+c=0$. Avec S : $10+6+c=0$, donc $c=-16$. En divisant par 2 : $x+3y-8=0$. Or, $2+6-8=0$: le point K est sur cette hauteur.

Exercice 7

1. **a.** La droite d est dirigée par $\vec{u}\,(-3\,;1)$, qui est normal à la perpendiculaire Δ. Une équation de Δ est $-3x+y+c=0$. Avec M : $-12+7+c=0$, donc $c=5$. On a donc $y=3x-5$. En remplaçant dans l'équation de d : $x+3(3x-5)-5=0$, soit $10x-20=0$. Donc $x=2$, puis $y=1$, et $H(2\,;1)$. Enfin, $MH=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

   b. On pose $H(x\,;2x-1)$. Alors $\overrightarrow{MH}\,(x-7\,;2x-4)$ est orthogonal à $(1\,;2)$: $x-7+2(2x-4)=5x-15=0$. Donc $x=3$ et $H(3\,;5)$. Enfin, $MH=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

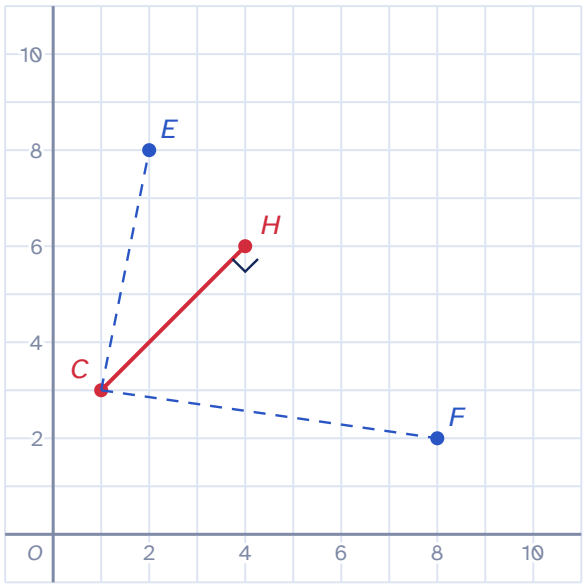
   c. La droite est parallèle à l'axe des ordonnées, donc $H(3\,;4)$ et $MH=4$.

   d. La droite est parallèle à l'axe des abscisses, donc $H(5\,;-2)$ et $MH=3$.

2. On a $2\times 2-3-1=0$, donc M est sur d. Son projeté orthogonal sur d est M lui-même.

3. Le point H est le milieu de $[MM']$. Ainsi, $x_{M'}=2\times 2-4=0$ et $y_{M'}=2\times 1-7=-5$. Donc $M'(0\,;-5)$.

Exercice 8



1. Le projeté orthogonal de C sur l'autoroute est le point de cette droite le plus proche de C. La route la plus courte aboutit donc en H.
2. L'autoroute est dirigée par $(1\,;-1)$, qui est normal à la perpendiculaire. Celle-ci a une équation $x-y+c=0$. Avec C : $1-3+c=0$, donc $c=2$. Une équation est $x-y+2=0$.
3. On a $y=x+2$. En remplaçant dans l'équation de l'autoroute : $x+x+2-10=0$, soit $2x=8$. Donc $x=4$, puis $y=6$, et $H(4\,;6)$.
4. On a $\overrightarrow{CH}\,(3\,;3)$, donc $CH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\approx 4{,}2$. La route mesure environ $4{,}2$ kilomètres.
5. Le coût vaut environ $4{,}2\times 5=21$ millions d'euros.
6. Les points E et F sont sur l'autoroute, car $2+8-10=0$ et $8+2-10=0$. La hauteur issue de C dans le triangle CEF est donc $[CH]$. On a $EF=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$. L'aire vaut $\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=18$ kilomètres carrés.

Une solution de BarroTech

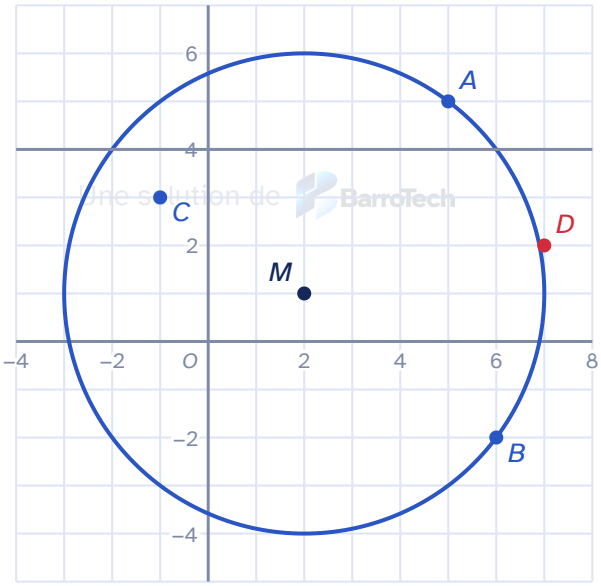
Exercice 9

1. **a.** $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ **b.** $x^2+y^2=7$ **c.** $(x+1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$
2. **a.** Centre $(5\,;1)$, rayon 7. **b.** Centre $(-2\,;-6)$, rayon $\sqrt{3}$. **c.** Centre $(0\,;4)$, rayon 1.
3. On a $R^2=CA^2=9+16=25$. Une équation est $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.
4. **a.** Le centre est le milieu $(1\,;-1)$ de $[EF]$. Comme $\overrightarrow{EF}\,(8\,;-6)$, on a $EF=10$, donc le rayon vaut 5. Une équation est $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

   b. Pour G : $9+16=25$. Le point G est bien sur le cercle.

   c. On a $\overrightarrow{GE}\,(-7\,;-1)$ et $\overrightarrow{GF}\,(1\,;-7)$, donc $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}=-7+7=0$. Le triangle EGF est rectangle en G.
5. Si $x=0$, alors $4+(y-1)^2=13$, soit $(y-1)^2=9$. Donc $y-1=3$ ou $y-1=-3$, c'est-à-dire $y=4$ ou $y=-2$.

Exercice 10



1. Le rayon vaut 5 hectomètres, donc une équation est $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.
2. Pour A : $9+16=25$, sur le bord. Pour B : $16+9=25$, sur le bord. Pour C : $9+4=13<25$, dans la zone. Pour D : $25+1=26>25$, en dehors.
3. **a.** Un point $(x\,;4)$ est dans la zone ou sur son bord si et seulement si $(x-2)^2+(4-1)^2\leq 25$, c'est-à-dire $(x-2)^2+9\leq 25$, soit $(x-2)^2\leq 16$.

   b. Cette inégalité équivaut à $-4\leq x-2\leq 4$, soit $-2\leq x\leq 6$. La partie de la rue dans la zone mesure $6-(-2)=8$ hectomètres, soit 800 mètres.

Exercice 11

1. *On complète les carrés, puis on fait passer les nombres à droite.*

   a. $(x-2)^2-4+(y-3)^2-9-3=0$, soit $(x-2)^2+(y-3)^2=16$. Centre $(2\,;3)$, rayon 4.

   b. $(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=0$, soit $(x+1)^2+(y-4)^2=9$. Centre $(-1\,;4)$, rayon 3.

   c. $x^2+(y-5)^2-25=0$, soit $x^2+(y-5)^2=25$. Centre $(0\,;5)$, rayon 5.

   d. En divisant par 2 : $x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Puis $(x+2)^2-4+(y-1)^2-1-4=0$, soit $(x+2)^2+(y-1)^2=9$. Centre $(-2\,;1)$, rayon 3.

2. **a.** $(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+10=0$, soit $(x-3)^2+(y+1)^2=0$. L'ensemble est le point $(3\,;-1)$.

   b. $(x+2)^2-4+y^2+9=0$, soit $(x+2)^2+y^2=-5$. Une somme de carrés n'est jamais négative : l'ensemble est vide.

   c. $(x-1)^2-1+y^2-1=0$, soit $(x-1)^2+y^2=2$. L'ensemble est le cercle de centre $(1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3. Seule $x^2+y^2=4$ est une équation de cercle, de centre O et de rayon 2. Dans les deux autres, x^2 et y^2 n'ont pas le même coefficient.

Exercice 12

1. On complète les carrés : $x^2-2mx=(x-m)^2-m^2$ et $y^2+4y=(y+2)^2-4$. L'équation devient $(x-m)^2-m^2+(y+2)^2-4+2m+7=0$, soit $(x-m)^2+(y+2)^2=m^2-2m-3$.

2. Le nombre -1 est une racine évidente de m^2-2m-3. Le produit des racines vaut -3, donc l'autre racine est 3. Ainsi, $m^2-2m-3=(m+1)(m-3)$. Ce polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(m+1)(m-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Si $m<-1$ ou $m>3$, l'ensemble E_m est le cercle de centre $(m\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{m^2-2m-3}$. Si $m=-1$ ou $m=3$, c'est un seul point, $(m\,;-2)$. Si $-1<m<3$, l'ensemble est vide.

4. Pour $m=4$, le centre est $(4\,;-2)$ et $m^2-2m-3=16-8-3=5$. Le rayon vaut $\sqrt{5}$.

5. L'origine est sur E_m si et seulement si $2m+7=0$, soit $m=-\dfrac{7}{2}$. Comme $-\dfrac{7}{2}<-1$, c'est bien un cercle.

Exercice 13

1. On a $A(0\,;0)$, $B(2\,;0)$, $C(2\,;1)$, $D(0\,;1)$ et $I(1\,;1)$.
2. On a $\overrightarrow{AI}\,(1\,;1)$ et $\overrightarrow{BI}\,(-1\,;1)$, donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI}=-1+1=0$. Les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires.
3. Le centre est le milieu $(1\,;0)$ de $[AB]$ et le rayon vaut 1. Une équation est $(x-1)^2+y^2=1$. Pour I : $0+1=1$. Le point I est bien sur ce cercle.
4. La droite (AI) a pour équation $y=x$. La droite (BD) passe par $D(0\,;1)$ et $B(2\,;0)$: son équation est $x+2y-2=0$. En remplaçant y par x : $3x=2$, donc $x=\dfrac{2}{3}$. Ainsi, $P\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$.
5. On a $B(a\,;0)$, $C(a\,;b)$, $D(0\,;b)$ et $I\left(\dfrac{a}{2}\,;b\right)$. Donc $\overrightarrow{AI}\left(\dfrac{a}{2}\,;b\right)$, $\overrightarrow{BI}\left(-\dfrac{a}{2}\,;b\right)$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI}=b^2-\dfrac{a^2}{4}$. Ce nombre est nul si et seulement si $a^2=4b^2$. Comme a et b sont positifs, cela équivaut à $a=2b$.

Exercice 14

1. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\,(-7\,;1)$. La médiatrice a une équation $-7x+y+c=0$, avec $-\dfrac{35}{2}+\dfrac{9}{2}+c=0$, donc $c=13$. Ainsi, $7x-y-13=0$. Le milieu de $[BC]$ est $\left(-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-1\,;-7)$, ou $(1\,;7)$ en changeant le sens. La médiatrice a une équation $x+7y+c=0$, avec $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{21}{2}+c=0$, donc $c=-9$. Ainsi, $x+7y-9=0$.
2. Le point S est sur les deux médiatrices. La première équation donne $y=7x-13$. En remplaçant dans la seconde : $x+49x-91-9=0$, soit $50x=100$. Donc $x=2$, puis $y=1$, et $S(2\,;1)$.
3. On a $SA=\sqrt{16+9}=5$. Une équation du cercle est $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. Pour B : $9+16=25$. Pour C : $16+9=25$. Le cercle passe bien par B et C. La salle des fêtes est à 5 kilomètres des trois villages.
4. Le vecteur $\overrightarrow{SA}\,(4\,;3)$ est normal à la route, qui a une équation $4x+3y+c=0$. Avec A : $24+12+c=0$, donc $c=-36$. Une équation est $4x+3y-36=0$. C'est la tangente au cercle en A.

Une solution de BarroTech