Trigonométrie

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée. On pourra utiliser $\pi \approx 3{,}14$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Leçon 1 : cosinus, sinus et tangente dans le triangle rectangle

Exercice 1 : lignes trigonométriques

1. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 8$ et $AC = 6$.
   - **a.** Calculer BC.
   - **b.** Donner le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.
   - **c.** Donner le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.
   - **d.** Comparer $\cos\widehat{ABC}$ et $\sin\widehat{ACB}$. Expliquer.
2. Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DF = 13$ et $EF = 5$. Calculer DE, puis donner $\cos\widehat{EDF}$, $\sin\widehat{EDF}$ et $\tan\widehat{EDF}$.
3. Un élève trouve $\cos\alpha = 1{,}2$ pour un angle aigu d'un triangle rectangle. Pourquoi est-ce impossible ?

Exercice 2 : la falaise, le hauban et une relation

Une solution de BarroTech

1. Un bateau est à 200 mètres du pied d'une falaise verticale. La visée du sommet fait un angle de $20°$ avec l'horizontale. On donne $\tan 20° \approx 0{,}36$ et on néglige la hauteur de l'observateur. Donner une valeur approchée de la hauteur de la falaise.
2. Un hauban de 25 mètres relie le sommet d'un pylône vertical à un point du sol. Il fait avec le sol un angle α tel que $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$. Calculer $\sin\alpha$, puis la hauteur du pylône et la distance entre le pied du pylône et le point d'ancrage.
3. Pour un angle aigu, on donne $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$. Calculer $\cos\alpha$, puis $\tan\alpha$.
4. Démontrer que, pour un angle aigu, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Leçon 2 : cercle trigonométrique, radian et longueur d'arc

Exercice 3 : degrés et radians

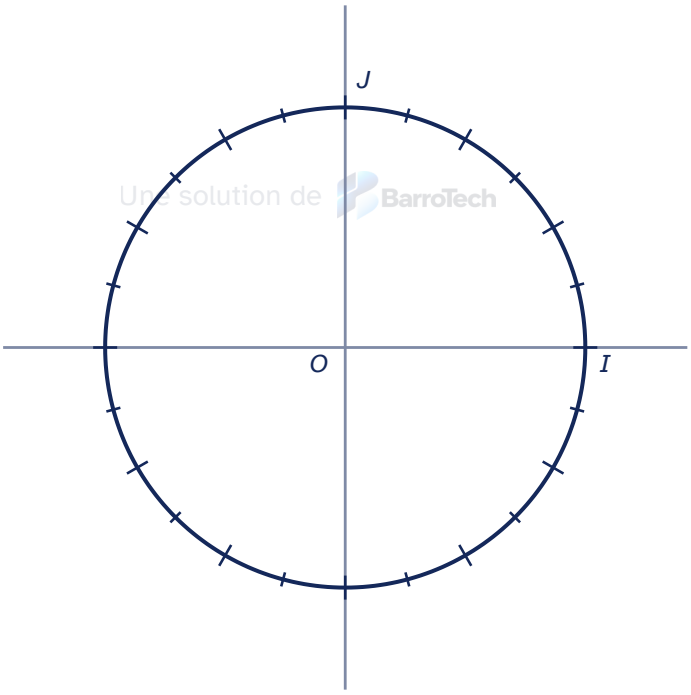
1. Convertir en radians.
   a. $15°$ **b.** $20°$ **c.** $72°$ **d.** $120°$ **e.** $135°$ **f.** $210°$ **g.** $300°$
2. Convertir en degrés.
   a. $\dfrac{\pi}{5}$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **c.** $\dfrac{5\pi}{4}$ **d.** $\dfrac{7\pi}{6}$ **e.** $\dfrac{11\pi}{6}$ **f.** $\dfrac{\pi}{12}$
3. Un angle mesure 2 radians. Donner une valeur approchée de sa mesure en degrés, à l'unité près.

Exercice 4 : longueurs d'arc

1. Sur le cercle trigonométrique, donner la longueur de l'arc découpé par un angle au centre de $40°$, puis de $270°$.
2. L'extrémité du balai d'un essuie-glace est à 50 centimètres de son axe. Le balai balaie un angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians. Quelle longueur parcourt cette extrémité lors d'un balayage ?
3. Un rond-point a un rayon de 15 mètres. Une voiture y parcourt un arc d'angle au centre $120°$. Donner la valeur exacte de la longueur de cet arc, puis une valeur approchée au mètre près.
4. Deux points d'un même méridien sont séparés de $9°$. Le rayon de la Terre vaut environ $6\,400$ kilomètres. Donner la distance entre ces deux points, mesurée sur le méridien, au kilomètre près.
5. Sur un cercle de rayon 4 centimètres, un arc mesure 6 centimètres. Quelle est, en radians, la mesure de l'angle au centre qui le découpe ?

Leçon 3 : enroulement de la droite et image d'un réel

Exercice 5 : placer des points



Une solution de BarroTech

1. Sur ce cercle trigonométrique, gradué tous les $\frac{\pi}{12}$, placer les images des réels suivants.
   A : $\frac{\pi}{3}$ **B :** $\frac{3\pi}{4}$ **C :** $\frac{5\pi}{6}$ **D :** $-\frac{\pi}{6}$ **E :** $-\frac{\pi}{2}$ **F :** $-\frac{2\pi}{3}$ **G :** $\frac{7\pi}{6}$
2. Dans quel quart du cercle se trouve l'image de chacun de ces réels ?
   a. $\frac{2\pi}{5}$ **b.** $\frac{3\pi}{5}$ **c.** $-\frac{3\pi}{5}$ **d.** $\frac{7\pi}{5}$ **e.** $-\frac{\pi}{5}$ **f.** $\frac{9\pi}{5}$

Exercice 6 : les tours entiers et le manège

1. Pour chaque réel, donner le réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ qui a la même image.
   a. $\dfrac{9\pi}{4}$ **b.** $\dfrac{7\pi}{3}$ **c.** $\dfrac{17\pi}{6}$ **d.** $-\dfrac{13\pi}{6}$ **e.** $\dfrac{5\pi}{2}$ **f.** 11π **g.** $-\dfrac{7\pi}{4}$ **h.** $\dfrac{23\pi}{4}$
2. Parmi les réels $\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{13\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$, lesquels ont la même image que $\dfrac{\pi}{3}$?
3. Un cheval de bois de manège part du point I et tourne dans le sens direct. On repère sa position sur le cercle trigonométrique.
   - **a.** Il effectue 3 tours et un quart. Quel réel x correspond à ce parcours ? Quelle est l'image de x ?
   - **b.** Il repart dans le sens inverse pour 2 tours et demi. Quel est le nouveau réel ? Quelle est son image ?
   - **c.** Sur le manège réel, le cheval tourne sur un cercle de 4 mètres de rayon. Quelle distance parcourt-il pendant les 3 tours et un quart ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au mètre près.

Leçon 4 : cosinus et sinus d'un nombre réel

Exercice 7 : lire sur le cercle

1. Donner, sans calcul, le cosinus et le sinus de chaque réel.
   a. $\dfrac{3\pi}{2}$ **b.** 2π **c.** 7π **d.** $-\dfrac{3\pi}{2}$ **e.** $\dfrac{5\pi}{2}$
2. Avec $\pi \approx 3{,}14$, situer l'image de chacun des réels 1, 3, 4 et 6 sur le cercle. En déduire le signe de son cosinus et celui de son sinus.
3. Dire si chaque égalité est possible pour un réel x. Justifier.
   a. $\cos x = 1{,}2$ **b.** $\sin x = -0{,}5$ **c.** $\cos x = \sqrt{2}$ **d.** $\sin x = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 8 : utiliser la relation

1. On suppose que $\cos x = -\dfrac{5}{13}$ et $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Calculer $\sin x$.
2. On suppose que $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0$. Calculer $\cos x$.
3. On suppose que $\cos x = \dfrac{1}{3}$ et $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $\sin x$.
4. Soit M l'image d'un réel x de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et H le point de l'axe des abscisses situé sous M, avec $OH = 0{,}6$. Calculer HM, puis donner $\cos x$ et $\sin x$.
5. Existe-t-il un réel x tel que $\cos x = \dfrac{3}{4}$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$? Justifier.

Leçon 5 : valeurs remarquables

Exercice 9 : les deux démonstrations à connaître

Refaire chaque démonstration en rédigeant toutes les étapes.

1. Soit M l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique, et H le point de l'axe des abscisses situé sous M.
   - **a.** Quelle est la nature du triangle OHM ? Justifier.
   - **b.** On pose $a = OH$. Écrire le théorème de Pythagore, puis en déduire a.
   - **c.** Conclure pour $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.
2. Soit M l'image de $\frac{\pi}{3}$, et H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OIM.
   - **a.** Démontrer que le triangle OIM est équilatéral.
   - **b.** En déduire OH, puis $\cos\frac{\pi}{3}$.
   - **c.** Calculer HM, puis conclure pour $\sin\frac{\pi}{3}$.

Exercice 10 : utiliser les valeurs

1. Le toit d'une cabane est fait de deux pans de 4 mètres, inclinés de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'horizontale, et symétriques l'un de l'autre. Calculer la hauteur du faitage au-dessus du bas des pans, puis la largeur de la cabane. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.
2. Calculer, sans calculatrice.
   a. $A = \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{3}$ **b.** $B = \cos\frac{\pi}{4} \times \sin\frac{\pi}{4}$ **c.** $C = \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$
   d. $D = 2\sin\frac{\pi}{6} - \cos 0$
3. En utilisant $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, donner $\tan 30°$, $\tan 45°$ et $\tan 60°$.
4. Calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de 6 centimètres de côté, à l'aide d'un sinus.

Leçon 6 : angles associés

Exercice 11 : lire une valeur

1. Donner la valeur exacte de chaque nombre.
   a. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **c.** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **d.** $\sin\frac{3\pi}{4}$ **e.** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **f.** $\sin\frac{7\pi}{6}$ **g.** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **h.** $\sin\frac{4\pi}{3}$
   i. $\cos\frac{5\pi}{3}$ **j.** $\sin\frac{11\pi}{6}$ **k.** $\cos\frac{7\pi}{4}$
2. Retirer d'abord les tours entiers, puis donner la valeur exacte.
   a. $\cos\frac{13\pi}{6}$ **b.** $\sin\frac{9\pi}{4}$ **c.** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **d.** $\sin\frac{17\pi}{6}$
3. Un réel x de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ vérifie $\cos x = 0{,}8$ et $\sin x = 0{,}6$. Donner $\cos(-x)$, $\sin(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 12 : la rosace

Une rosace circulaire de 5 mètres de rayon porte douze sommets A_0, A_1, ..., A_{11}, régulièrement répartis. On choisit un repère orthonormé d'origine le centre O, en mètres. Le sommet A_k est sur la demi-droite d'origine O qui passe par l'image de $\dfrac{k\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique. Ses coordonnées sont donc $\left(5\cos\dfrac{k\pi}{6}\,;5\sin\dfrac{k\pi}{6}\right)$.

1. Donner les coordonnées exactes de A_2, A_5, A_7 et A_{10}.
2. Quel sommet est le plus haut ? Quelle est, à $0{,}1$ mètre près, la différence de hauteur entre A_2 et A_5 ?
3. Calculer $S=\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{5\pi}{6}+\cos\dfrac{7\pi}{6}+\cos\dfrac{11\pi}{6}$. Expliquer le résultat sur le cercle.
4. Par lecture du cercle, quel sommet a pour abscisse $-\dfrac{5}{2}$ et pour ordonnée $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$?

Leçon 7 : approximation de π par la méthode d'Archimède, en Python

Exercice 13 : lire et compléter le programme

On reprend la fonction `encadrement` de la leçon 7.

1. Que valent `bas` et `haut` pour `encadrement(0)` ? Donner les valeurs exactes.
2. Après un seul tour de boucle, quelles sont les valeurs exactes de `n` et de `c` ? Vérifier que $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
3. Combien de fois la boucle `for i in range(k)` s'exécute-t-elle ?
4. Écrire une fonction `ecart(k)` qui renvoie la différence entre `haut` et `bas`.
5. On considère la fonction suivante.

Une solution de BarroTech

```
def precision(e):
    k = 0
    while ecart(k) >= e:
        k = k + 1
    return k
```

Que renvoie `precision(e)` ? Avec $e=10^{-6}$, on obtient 10. Combien de côtés a alors le polygone ?

Exercice 14 : partir d'un carré

On remplace l'hexagone de départ par le carré de sommets I, J, I' et J'.

1. Calculer le côté c de ce carré, puis son demi-périmètre.
2. Le carré extérieur a pour côté 2. Donner son demi-périmètre. Vérifier que l'on retrouve la formule haut $= \dfrac{\text{bas}}{OH}$, avec $OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. En déduire un encadrement de π par deux nombres décimaux à un chiffre après la virgule.
4. Donner la valeur exacte du côté de l'octogone intérieur, puis celle de son demi-périmètre.
5. Quelles sont les deux lignes à modifier dans la fonction `encadrement` pour partir de ce carré ? Écrire ces deux lignes.
6. À nombre de doublements égal, lequel des deux départs donne le meilleur encadrement ? Pourquoi ?

Une solution de BarroTech