Trigonométrie

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. **a.** D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$, donc $BC = 10$.

   b. Pour l'angle $\widehat{ABC}$, le côté adjacent est $[AB]$ et le côté opposé est $[AC]$. Ainsi, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ et $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

   c. Pour l'angle $\widehat{ACB}$, les côtés adjacent et opposé s'échangent : $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{4}{5}$ et $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{4}{3}$.

   d. On a $\cos\widehat{ABC} = \sin\widehat{ACB} = \dfrac{4}{5}$. En effet, le côté adjacent à l'un des angles est le côté opposé à l'autre, et l'hypoténuse est la même.
2. D'après le théorème de Pythagore, $DE^2 = DF^2 - EF^2 = 169 - 25 = 144$, donc $DE = 12$. Ainsi, $\cos\widehat{EDF} = \dfrac{12}{13}$, $\sin\widehat{EDF} = \dfrac{5}{13}$ et $\tan\widehat{EDF} = \dfrac{5}{12}$.
3. L'hypoténuse est le plus long côté, donc le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse est plus petit que 1. La valeur $1{,}2$ est impossible.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. On connait le côté adjacent et on cherche le côté opposé h : on a $\tan 20° = \dfrac{h}{200}$, donc $h = 200 \times \tan 20° \approx 200 \times 0{,}36 = 72$. La falaise mesure environ 72 mètres.
2. On a $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{49}{625} = \dfrac{576}{625}$. Comme $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha = \dfrac{24}{25}$. La hauteur du pylône est le côté opposé : $25 \times \dfrac{24}{25} = 24$ mètres. La distance au point d'ancrage est le côté adjacent : $25 \times \dfrac{7}{25} = 7$ mètres.
3. On a $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{64}{289} = \dfrac{225}{289}$. Comme $\cos\alpha > 0$, $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$. Ainsi, $\tan\alpha = \dfrac{8}{17} \times \dfrac{17}{15} = \dfrac{8}{15}$.
4. Notons a le côté adjacent, b le côté opposé et c l'hypoténuse. On a $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{c} \times \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{a} = \tan\alpha$.

Exercice 3

1. *On multiplie par $\frac{\pi}{180}$, ou on part du tableau.*

   a. $15° = \frac{\pi}{12}$; **b.** $20° = \frac{\pi}{9}$; **c.** $72° = \frac{2\pi}{5}$; **d.** $120° = \frac{2\pi}{3}$; **e.** $135° = \frac{3\pi}{4}$; **f.** $210° = \frac{7\pi}{6}$; **g.** $300° = \frac{5\pi}{3}$.

2. *On multiplie par $\frac{180}{\pi}$: le nombre π se simplifie.*

   a. $36°$; **b.** $120°$; **c.** $225°$; **d.** $210°$; **e.** $330°$; **f.** $15°$.

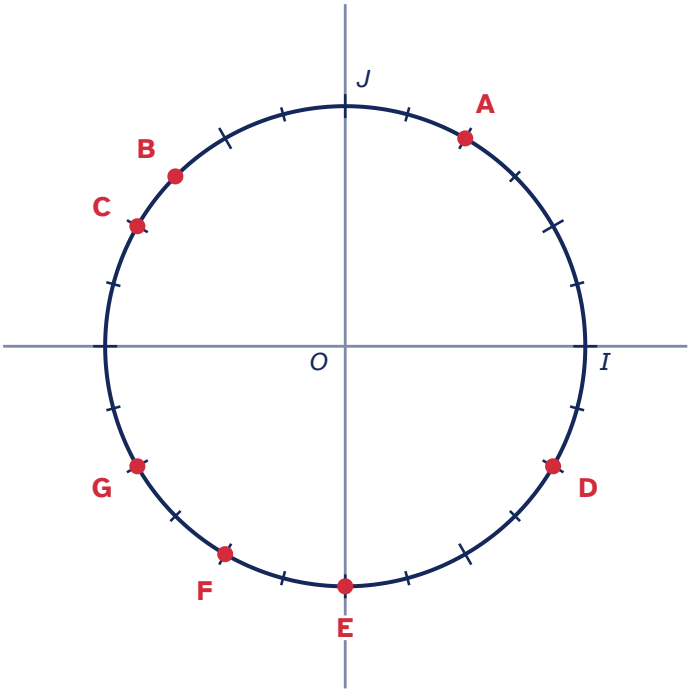
3. On a $2 \times \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi} \approx \frac{360}{3{,}14} \approx 115$. L'angle mesure environ $115°$.

Exercice 4

1. Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc est la mesure de l'angle en radians. On a $40° = 40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$ et $270° = \frac{3\pi}{2}$. Les arcs mesurent donc $\frac{2\pi}{9}$ et $\frac{3\pi}{2}$.
2. On a $\ell = 50 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{100\pi}{3} \approx 105$. L'extrémité parcourt environ 105 centimètres.
3. On a $120° = \frac{2\pi}{3}$ radians, donc $\ell = 15 \times \frac{2\pi}{3} = 10\pi \approx 31$. L'arc mesure 10π mètres, soit environ 31 mètres.
4. On a $9° = 9 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{20}$ radian, donc $\ell = 6\,400 \times \frac{\pi}{20} = 320\pi \approx 1\,005$. La distance vaut environ $1\,005$ kilomètres. *Avec $\pi \approx 3{,}14$, le calcul donne $1\,004{,}8$.*
5. De $\ell = R \times \alpha$, on tire $\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{6}{4} = 1{,}5$. L'angle mesure $1{,}5$ radian.

Exercice 5

1. Les images sont placées sur la figure.



2. *On compare la fraction de π à $\frac{1}{2}$ et à 1.*

Résolution de BarroTech

a. $\frac{2\pi}{5}$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: en haut à droite.

b. $\frac{3\pi}{5}$ est entre $\frac{\pi}{2}$ et π : en haut à gauche.

c. $-\frac{3\pi}{5}$ est entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$: en bas à gauche.

d. $\frac{7\pi}{5}$ est entre π et $\frac{3\pi}{2}$: en bas à gauche.

e. $-\frac{\pi}{5}$ est entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 : en bas à droite.

f. $\frac{9\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$ a la même image que $-\frac{\pi}{5}$: en bas à droite.

Exercice 6

1. *On ajoute ou on retire des multiples de 2π, jusqu'à arriver dans l'intervalle.*

a. $\dfrac{9\pi}{4} - 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$.

b. $\dfrac{7\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$.

c. $\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{5\pi}{6}$.

d. $-\dfrac{13\pi}{6} + 2\pi = -\dfrac{\pi}{6}$.

e. $\dfrac{5\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$.

f. $11\pi - 10\pi = \pi$.

g. $-\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$.

h. $\dfrac{23\pi}{4} - 6\pi = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. Deux réels ont la même image si leur différence est un multiple de 2π. On a $\dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi$, $-\dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = -2\pi$ et $\dfrac{13\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 4\pi$: ces trois réels conviennent. Les réels $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ ne conviennent pas.

3. **a.** Trois tours et un quart correspondent à $x = 3 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13\pi}{2}$. L'image de x est le point J.

b. Deux tours et demi dans le sens inverse retirent 5π. Le nouveau réel est $\dfrac{13\pi}{2} - 5\pi = \dfrac{3\pi}{2}$, dont l'image est le point J'.

Une solution de BarroTech

c. La distance vaut $\ell = 4 \times \dfrac{13\pi}{2} = 26\pi \approx 82$. Le cheval parcourt 26π mètres, soit environ 82 mètres.

Exercice 7

1. **a.** L'image de $\frac{3\pi}{2}$ est J' : $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

   b. L'image de 2π est I : $\cos 2\pi = 1$ et $\sin 2\pi = 0$.

   c. $7\pi = \pi + 6\pi$ a pour image I' : $\cos 7\pi = -1$ et $\sin 7\pi = 0$.

   d. $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ a pour image J : $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

   e. $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ a pour image J : $\cos\frac{5\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$.

2. On a $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$ et $2\pi \approx 6{,}28$.

Réel	Position de l'image	cos	sin
1	en haut à droite	positif	positif
3	en haut à gauche	négatif	positif
4	en bas à gauche	négatif	négatif
6	en bas à droite	positif	négatif

3. Pour tout réel x, le cosinus et le sinus sont compris entre -1 et 1.

   a. Impossible, car $1{,}2 > 1$.

   b. Possible, car $-1 \leq -0{,}5 \leq 1$.

   c. Impossible, car $\sqrt{2} \approx 1{,}41 > 1$.

   d. Possible, car $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79 \leq 1$.

Une solution de BarroTech

Exercice 8

1. On a $\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Comme x est entre $\frac{\pi}{2}$ et π, $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \frac{12}{13}$.
2. On a $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Comme x est entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, $\cos x \geq 0$, donc $\cos x = \frac{4}{5}$.
3. On a $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Comme x est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
4. Dans le triangle OHM, rectangle en H, avec $OM = 1$: $HM^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, donc $HM = 0{,}8$. Ainsi, $\cos x = OH = 0{,}6$ et $\sin x = HM = 0{,}8$.
5. On calcule $\cos^2 x + \sin^2 x$: $\frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{13}{16}$. Ce nombre n'est pas égal à 1 : un tel réel n'existe pas.

Exercice 9

1. **a.** Le triangle OHM est rectangle en H, et son angle en O mesure $45°$. La somme des angles vaut $180°$, donc son angle en M mesure aussi $45°$. Le triangle est isocèle en H : $OH = HM$.

   b. On a $OM = 1$. D'après le théorème de Pythagore, $a^2 + a^2 = 1$, donc $a^2 = \dfrac{1}{2}$. Comme $a > 0$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   c. Le point M a pour coordonnées $(a\,;a)$, donc $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **a.** On a $OI = OM = 1$, donc le triangle OIM est isocèle en O. Son angle en O mesure $60°$. Ses deux autres angles sont égaux et leur somme vaut $120°$: ils mesurent $60°$. Le triangle est équilatéral.

   b. Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue de M est aussi une médiane. Le point H est donc le milieu de $[OI]$, et $OH = \dfrac{1}{2}$. Comme OH est l'abscisse de M, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

   c. Dans le triangle OHM, rectangle en H : $HM^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Comme $HM > 0$, $HM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 10

1. Chaque pan est l'hypoténuse d'un triangle rectangle d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. La hauteur du faitage est le côté opposé : $4 \times \sin\dfrac{\pi}{6} = 2$ mètres. La demi-largeur est le côté adjacent : $4 \times \cos\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ mètres. La largeur vaut donc $4\sqrt{3} \approx 6{,}9$ mètres.

Une solution de Barrotech

2. **a.** $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}$.

   b. $B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

   c. $C = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.

   d. $D = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$.

3. $\tan 30° = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan 45° = 1$; $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

4. La hauteur partage le triangle en deux triangles rectangles, d'hypoténuse 6 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. La hauteur est le côté opposé à cet angle : elle vaut $6 \times \sin\dfrac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ centimètres.

Exercice 11

1. *On repère la valeur remarquable, on place le point, on lit les signes.*

a. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

d. $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$, donc $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

e. $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$, donc $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

f. $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, donc $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

g. $\dfrac{5\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4}$, donc $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

h. $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$, donc $\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

i. $\dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

j. $\dfrac{11\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$, donc $\sin\dfrac{11\pi}{6} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

k. $\dfrac{7\pi}{4} = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$, donc $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **a.** $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$, donc $\cos\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e solution de BarroTech

b. $\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, donc $\sin\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $-\dfrac{7\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi$, donc $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

d. $\dfrac{17\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi$, donc $\sin\dfrac{17\pi}{6} = \sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

3. Par lecture du cercle : $\cos(-x) = 0{,}8$; $\sin(-x) = -0{,}6$; $\cos(\pi - x) = -0{,}8$; $\sin(\pi + x) = -0{,}6$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = 0{,}6$.

Exercice 12

1. On a $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$, donc $A_2\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

   De même, $A_5\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right)$, car $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$.

   Ensuite, $A_7\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{5}{2}\right)$, car $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$.

   Enfin, $A_{10}\left(\dfrac{5}{2}\,;-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, car $\dfrac{10\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

2. Le sommet le plus haut est celui dont l'ordonnée est la plus grande : c'est $A_3(0\,;5)$, car $\sin\dfrac{3\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. La différence de hauteur entre A_2 et A_5 vaut $\dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2} \approx \dfrac{5\times 0{,}73}{2} \approx 1{,}8$ mètre.

3. On a $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Sur le cercle, ces quatre points sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : leurs abscisses sont opposées deux à deux.

4. L'abscisse est négative et l'ordonnée positive : le sommet est en haut à gauche. On reconnait $5\cos\dfrac{2\pi}{3}$ et $5\sin\dfrac{2\pi}{3}$. C'est A_4, car $\dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 13

Une solution de BarroTech

1. Pour `k = 0`, la boucle ne s'exécute pas : `n` vaut 6 et `c` vaut 1. Ainsi, `bas` vaut $\dfrac{6\times 1}{2} = 3$, et `haut` vaut $\dfrac{3}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 3\times\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

2. Après un tour de boucle, `n` vaut 12 et `c` vaut $\sqrt{2-\sqrt{4-1}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. De plus, $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{6-2\sqrt{12}+2}{4} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$. Comme $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ est positif, on a bien $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

3. La boucle s'exécute k fois : `i` prend les valeurs de 0 à $k-1$.

4. Une réponse possible :

```
def ecart(k):
    e = encadrement(k)
    return e[1] - e[0]
```

5. La fonction `precision` renvoie le plus petit nombre de doublements pour lequel l'écart entre `haut` et `bas` est strictement inférieur à e. Avec 10 doublements, le polygone a $6\times 2^{10} = 6\,144$ côtés.

Exercice 14

1. Le triangle OIJ est rectangle en O, avec $OI = OJ = 1$. D'après le théorème de Pythagore, $c = IJ = \sqrt{2}$. Le demi-périmètre vaut $\dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.
2. Le demi-périmètre du carré extérieur vaut $\dfrac{4 \times 2}{2} = 4$. On retrouve bien $\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 4$.
3. Comme $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$, on obtient $2{,}8 < \pi < 4$.
4. Le côté de l'octogone vaut $\sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Son demi-périmètre vaut $\dfrac{8\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
5. On modifie les deux lignes de départ, `n = 6` et `c = 1` :

```
    n = 4
    c = sqrt(2)
```

6. Le départ de l'hexagone est meilleur. À nombre de doublements égal, ses polygones ont davantage de côtés : pour k doublements, 6×2^k côtés au lieu de 4×2^k. Ils serrent donc le cercle de plus près.

Une solution de BarroTech