Variations et courbes représentatives des fonctions

FONCTIONS

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée, sauf ce que l'on confie à Python.

Leçon 1 : fonctions paires, fonctions impaires

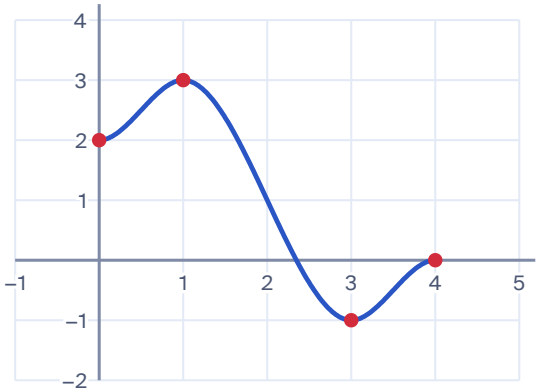
Exercice 1 : parité, par le calcul

1. Étudier la parité de chaque fonction. Conclure par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».
   - **a.** $f(x) = x^4 + 2x^2 - 5$ sur $\mathbb{R}$
   - **b.** $g(x) = 3x^3 - x$ sur $\mathbb{R}$
   - **c.** $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$
   - **d.** $k(x) = x^3 + x^2$ sur $\mathbb{R}$
   - **e.** $m(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
   - **f.** $p(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$
2. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** Si $f(2) = f(-2)$, alors f est paire.
   - **b.** Si f et g sont paires sur $\mathbb{R}$, alors $f + g$ est paire sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à la fois paire et impaire, est la fonction nulle.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : compléter par symétrie

La figure représente une fonction f sur $[0\,;4]$. Elle passe par $(0\,;2)$, $(1\,;3)$, $(3\,;-1)$ et $(4\,;0)$, et ces points sont ceux où son sens de variation change, ou ses extrémités.



1. On suppose que f se prolonge en une fonction paire sur $[-4\,;4]$. Donner $f(-1)$ et $f(-3)$, puis dresser son tableau de variations sur $[-4\,;4]$.
2. Peut-on prolonger f en une fonction impaire sur $[-4\,;4]$? Justifier.
3. Soit g la fonction impaire sur $[-4\,;4]$ telle que $g(x) = f(x) - 2$ pour x dans $[0\,;4]$. Calculer $g(1)$, $g(-1)$, $g(3)$ et $g(-3)$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[-4\,;4]$.

Leçon 2 : signe de la dérivée et sens de variation

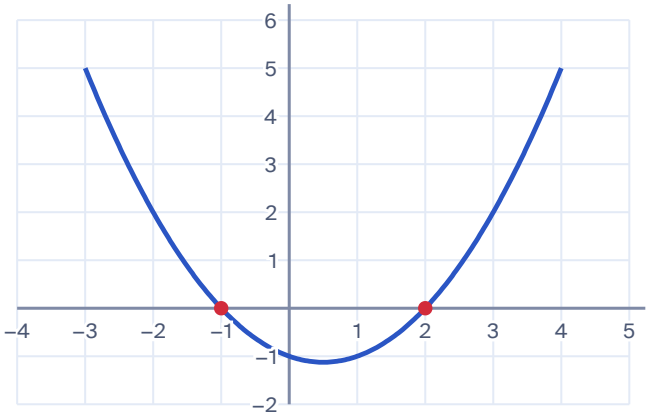
Une solution de BarroTech

Exercice 3 : le sens de variation, sans tableau

1. Montrer que $f(x) = x^3 + 2x - 5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g(x) = -x^3 - 4x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $k(x) = x + \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
4. Montrer que $n(x) = x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors que sa dérivée s'annule.
5. Soit $m(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de m sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
   - **b.** Calculer $m(-1)$ et $m(1)$. La fonction m est-elle croissante sur la réunion de ces deux intervalles ?
6. Soit $p(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2 - 8x$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $p'(x)$, puis en déduire $p(x)$ pour tout réel x.

Exercice 4 : lire la courbe de la dérivée

La figure représente la fonction dérivée f' d'une fonction f, définie sur $[-3\,;4]$. **Attention : c'est la courbe de f', et non celle de f.** Elle coupe l'axe des abscisses en -1 et en 2.



1. Donner le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $[-3\,;4]$.
3. La fonction f admet-elle des extrémums locaux ? Où ?
4. On lit que $f'(0) = -1$. Que représente ce nombre pour la courbe de f ?
5. Peut-on dire, avec cette seule figure, que $f(x) > 0$ sur $[2\,;4]$? Justifier.

Leçon 3 : étudier une fonction

Une solution de BarroTech

Exercice 5 : une étude complète

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur $[-2\,;3]$.

1. Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f, avec les images.
3. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2\,;3]$, et préciser où ils sont atteints.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.

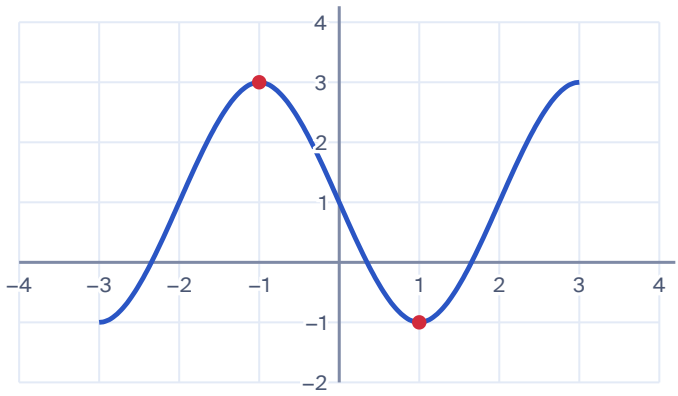
Exercice 6 : deux fractions et une lecture

Partie A. Soit $h(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $h'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de h, et donner son minimum.

Partie B. Soit $k(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de k, et donner son minimum.

Partie C. La figure représente une fonction u sur $[-3\,;3]$.



1. Dresser le tableau de variations de u.
2. Résoudre graphiquement $u(x) = 1$, puis $u(x) = 3$.
3. Résoudre graphiquement $u(x) < 1$, puis $u(x) > 3$.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : extrémum et tangente horizontale

Exercice 7 : nécessaire, pas suffisante

1. Soit $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g'(x) = 3(x-2)^2$. La fonction g admet-elle un extrémum local en 2 ?
2. Vrai ou faux ? On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier.
   - **a.** Si f admet un maximum local en 3, alors la tangente au point d'abscisse 3 est horizontale.
   - **b.** Si $f'(2) = 0$, alors f admet un extrémum local en 2.
   - **c.** Pour que f admette un extrémum local en a, il faut que $f'(a) = 0$.
   - **d.** Pour que f admette un extrémum local en a, il suffit que $f'(a) = 0$.
3. Soit $f(x) = x^4 - 4x^3$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(x) = 4x^2(x-3)$. Dresser le tableau de variations de f. Que se passe-t-il en 0 ? En 3 ?
4. Soit $q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $q'(x) = 12x(x+1)(x-2)$, puis déterminer les extrémums locaux de q.

Exercice 8 : un cerf-volant

L'altitude d'un cerf-volant, en dizaines de mètres, est modélisée par $h(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$, où t est le temps en minutes, avec $0 \leq t \leq 4$.

1. Calculer $h'(t)$, et montrer que $h'(t) = 3(t-1)(t-3)$.
2. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\,;4]$.
3. Donner l'altitude maximale et l'altitude minimale sur cette période, et préciser les instants où elles sont atteintes.
4. Que peut-on dire des tangentes à la courbe de h aux points d'abscisses 1 et 3 ? Interpréter pour le cerf-volant.
5. Le nombre dérivé $h'(t)$ donne la vitesse verticale du cerf-volant, en dizaines de mètres par minute. À quel instant descend-il le plus vite ? Avec quelle vitesse ?

Leçon 5 : second degré et dérivation

Exercice 9 : extrémums du second degré

1. Pour chaque fonction, calculer la dérivée, puis donner le sens de variation, l'extrémum et l'allure de la courbe.
   - **a.** $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$
   - **b.** $g(x) = -2x^2 + 10x - 3$
   - **c.** $k(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1$
2. Déterminer b et c pour que $f(x) = x^2 + bx + c$ admette un minimum égal à 3, atteint en 2.
3. Soit $f(x) = ax^2 + 6x + 1$, avec $a \neq 0$. Déterminer a pour que f admette un extrémum en 3. Est-ce un maximum ou un minimum ? Quelle est sa valeur ?

Une solution de BarroTech

Exercice 10 : un lancer de poids

La trajectoire d'un poids est modélisée par $h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2$, où x est la distance au sol en mètres depuis le lanceur, et $h(x)$ la hauteur en mètres, avec $0 \leq x \leq 10$.

1. Calculer $h(0)$, et interpréter.
2. Calculer $h'(x)$. Pour quelle valeur de x le poids est-il le plus haut ? Quelle est alors sa hauteur ?
3. Vérifier que $h(x) = -0{,}1(x-10)(x+2)$. À quelle distance le poids retombe-t-il ?
4. Vérifier que $h(x) = -0{,}1(x-4)^2 + 3{,}6$. Retrouver ainsi le résultat de la question 2.
5. Calculer $h'(0)$ et $h'(10)$. Que représentent ces deux nombres ?

Leçon 6 : résoudre un problème d'optimisation

Exercice 11 : un carnet de recettes

Une page de carnet de recettes doit contenir une zone imprimée rectangulaire de 216 centimètres carrés. On laisse une marge de 2 centimètres à gauche et à droite, et de 3 centimètres en haut et en bas. On note x la largeur de la zone imprimée, en centimètres.

1. Exprimer la hauteur de la zone imprimée en fonction de x.
2. Montrer que l'aire de la page, en centimètres carrés, vaut $A(x) = 240 + 6x + \dfrac{864}{x}$, pour $x > 0$.
3. Montrer que $A'(x) = \dfrac{6(x-12)(x+12)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de A.
5. Quelles dimensions de page utilisent le moins de papier ?

Exercice 12 : une péniche

Une péniche parcourt 100 kilomètres sur un canal, à la vitesse constante v, en kilomètres par heure, avec $5 \le v \le 20$. Son coût de fonctionnement, en euros par heure, vaut $2v^2 + 200$.

1. Exprimer la durée du trajet en fonction de v.
2. Montrer que le coût total du trajet, en euros, vaut $C(v) = 200v + \dfrac{20\,000}{v}$.
3. Montrer que $C'(v) = \dfrac{200(v-10)(v+10)}{v^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de C sur $[5\,;20]$. Quelle vitesse rend le coût minimal ? Quel est ce coût ?
5. Sur ce canal, la vitesse est finalement limitée à 8 kilomètres par heure. Quelle vitesse choisir, sur $[5\,;8]$? Quel est alors le coût ?

Une solution de BarroTech

Leçon 7 : établir une inégalité

Exercice 13 : trois inégalités

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{9}{x} \ge 6$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?
2. Soit $d(x) = x^3 - 12x + 16$ sur $[0\,;+\infty[$.
   - **a.** Étudier les variations de d.
   - **b.** En déduire que, pour tout $x \ge 0$, $x^3 + 16 \ge 12x$.
   - **c.** Cette inégalité est-elle vraie pour $x = -5$?
3. Montrer que, pour tout $x \ge 0$, $4\sqrt{x} \le x + 4$. *On pourra étudier $d(x) = x + 4 - 4\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.*

Exercice 14 : encadrer, et une bâche

Partie A. Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-1\,;2]$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout x de $[-1\,;2]$.

Partie B. Une bâche rectangulaire a une aire de 16 mètres carrés. On veut la border d'un ourlet sur tout son tour. On note x sa largeur, en mètres.

3. Montrer que son périmètre vaut $P(x) = 2x + \dfrac{32}{x}$, pour $x > 0$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $P(x) \geq 16$.
5. Pour quelles dimensions l'ourlet est-il le plus court ? Quelle forme a alors la bâche ?

Leçon 8 : position relative de deux courbes

Exercice 15 : comparer deux courbes

Étudier la position relative des courbes des fonctions f et g, et donner leurs points communs.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = x + 3$, sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = 2x^2$, sur $\mathbb{R}$. *On factorisera la différence.*
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$, sur $]0\,;+\infty[$.
4. $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x^2 - 4$, sur $[0\,;+\infty[$. *On étudiera les variations de la différence.*

Une solution de BarroTech

Exercice 16 : une courbe et ses tangentes

1. Soit $f(x) = x^2$, et a un nombre réel.
   - **a.** Montrer que la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$.
   - **b.** Montrer que la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
   - **a.** Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 4.
   - **b.** Montrer que $\dfrac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x} - 2\right)^2$.
   - **c.** En déduire la position de la courbe par rapport à cette tangente.
3. Soit $f(x) = x^3 - 3x$.
   - **a.** Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
   - **b.** Vérifier que la différence entre $f(x)$ et l'expression de la tangente vaut $(x-2)^2(x+4)$.
   - **c.** Étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente. Cette tangente recoupe-t-elle la courbe ?

Leçon 9 : méthode de Newton en Python

Exercice 17 : Newton à la main

1. Soit $f(x) = x^2 - 3$, et $x_0 = 2$.
   - **a.** Calculer x_1 et x_2 avec la formule de Newton, sous forme de fractions.
   - **b.** On donne $\frac{97}{56} \approx 1{,}7321$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$. Que remarque-t-on ?
   - **c.** Pourquoi ne peut-on pas partir de $x_0 = 0$?
2. Soit $A > 0$ et $f(x) = x^2 - A$. Montrer que la formule de Newton s'écrit $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$. C'est la méthode de Héron.
3. Soit $f(x) = x^3 - 2$, et $x_0 = 1$. Calculer x_1 et x_2, sous forme de fractions. Quel nombre approche-t-on ainsi ?

Exercice 18 : Newton en Python

On reprend le programme du cours : les fonctions `f`, `df` et `newton`.

1. On veut résoudre $x^3 - 2x - 5 = 0$. Écrire les fonctions `f` et `df` correspondantes.
2. Calculer à la main le premier terme obtenu par `newton(2, 1)`, après 2.
3. Justifier que f est strictement croissante sur $[2\,;3]$.
4. On écrit la fonction suivante. Que renvoie-t-elle ?

Une solution de BarroTech

```
def etapes(x0, e):
    x = x0
    n = 0
    while abs(f(x)) > e:
        x = x - f(x) / df(x)
        n = n + 1
    return n
```

5. On obtient `etapes(2, 0.001)` égal à `2` et `etapes(2, 0.000001)` égal à `3`. Que signifient ces résultats ?