Variations et courbes représentatives des fonctions

FONCTIONS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. Les ensembles de **a** à **e** sont symétriques par rapport à 0.
   - **a.** $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 5 = x^4 + 2x^2 - 5 = f(x)$: f est paire.
   - **b.** $g(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -g(x)$: g est impaire.
   - **c.** $h(-x) = \dfrac{-2x}{(-x)^2 + 4} = -\dfrac{2x}{x^2 + 4} = -h(x)$: h est impaire.
   - **d.** $k(1) = 2$ et $k(-1) = 0$. Ces nombres ne sont ni égaux ni opposés : k n'est ni paire ni impaire.
   - **e.** $m(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} + 1 = m(x)$: m est paire.
   - **f.** Le nombre -1 appartient à l'ensemble de définition, mais pas 1. Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 : p n'est ni paire ni impaire.
2. **a.** Faux. Pour $f(x) = x^3 - 4x$, on a $f(2) = f(-2) = 0$, mais $f(1) = -3$ et $f(-1) = 3$: f n'est pas paire. Une égalité vraie pour un seul nombre ne suffit pas.

   b. Vrai. Pour tout réel x, $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.

   c. Vrai. Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = -f(x)$, puis $f(x) = 0$.

Exercice 2

1. Comme f est paire, $f(-1) = f(1) = 3$ et $f(-3) = f(3) = -1$. De l'autre côté de 0, le sens de variation s'inverse.

x	-4		-3		-1		0		1		3		4
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2. Non. Une fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$, alors qu'ici $f(0) = 2$.
3. On a $g(1) = f(1) - 2 = 1$, donc $g(-1) = -1$. On a $g(3) = f(3) - 2 = -3$, donc $g(-3) = 3$. De plus, $g(0) = 0$, $g(4) = -2$ et $g(-4) = 2$. De l'autre côté de 0, le sens de variation reste le même.

x	-4		-3		-1		1		3		4
g	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

Exercice 3

1. $f'(x) = 3x^2 + 2$. Un carré est positif, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $g'(x) = -3x^2 - 4 < 0$ pour tout réel x : g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $k'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$: k est strictement croissante sur cet intervalle.
4. $n'(x) = 5x^4$ est positif, et ne s'annule qu'en 0. Un seul point isolé d'annulation ne gêne pas : n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. **a.** $m'(x) = \dfrac{2}{x^2} > 0$: m est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

   b. $m(-1) = 5$ et $m(1) = 1$. On a $-1 < 1$, mais $m(-1) > m(1)$: m n'est pas croissante sur la réunion des deux intervalles.
6. $p'(x) = 2(x+2) - 2(x-2) - 8 = 0$ pour tout réel x. La fonction p est donc constante sur $\mathbb{R}$. Comme $p(0) = 4 - 4 = 0$, on a $p(x) = 0$ pour tout réel x.

Exercice 4

1. La courbe de f' est au-dessus de l'axe sur $[-3\,;-1[$ et sur $]2\,;4]$, et au-dessous sur $]-1\,;2[$. Donc $f'(x) > 0$ sur $[-3\,;-1[$ et sur $]2\,;4]$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;2[$.
2. Le tableau en découle.

Une solution de BarroTech

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. La dérivée s'annule en changeant de signe en -1 et en 2. La fonction f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 2.
4. C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Non. La figure donne le signe de f', c'est-à-dire les variations de f. Elle ne donne aucune valeur de f : f est croissante sur $[2\,;4]$, mais rien ne dit qu'elle est positive.

Exercice 5

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$. Les racines de $x^2 - x - 2$ sont -1 et 2 : leur somme vaut 1, et leur produit -2. Donc $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$.
2. Comme $a = 6 > 0$, $f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines. On calcule $f(-2) = 1$, $f(-1) = 12$, $f(2) = -15$ et $f(3) = -4$.

x	-2		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$	-4

3. *On compare les valeurs aux bornes aux valeurs du tableau.* Sur $[-2\,;3]$, le maximum de f est 12, atteint en -1, et le minimum est -15, atteint en 2.
4. $f(0) = 5$ et $f'(0) = -12$. La tangente a pour équation $y = 5 - 12(x - 0)$, soit $y = -12x + 5$.

Une solution de BarroTech

Exercice 6

Partie A.

1. Avec la formule du quotient :

$$h'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

2. Sur $]-1\,;+\infty[$, $x+3>0$ et $(x+1)^2>0$: le signe de $h'(x)$ est celui de $x-1$.

x	-1		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

Le minimum de h est $h(1) = \frac{4}{2} = 2$.

Partie B. On a $k'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} = \frac{3(x^2-4)}{x^2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x^2}$. Sur $]0\,;+\infty[$, le signe est celui de $x-2$: k est décroissante sur $]0\,;2]$, puis croissante sur $[2\,;+\infty[$. Son minimum est $k(2) = 6+6 = 12$.

Partie C.

1. Le tableau se lit sur la courbe.

x	-3		-1		1		3
u	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

de BarroTech

2. La droite d'équation $y=1$ coupe la courbe aux points d'abscisses -2, 0 et 2 : ce sont les solutions de $u(x)=1$. La droite d'équation $y=3$ la touche aux points d'abscisses -1 et 3 : ce sont les solutions de $u(x)=3$.
3. La courbe est strictement au-dessous de la droite d'équation $y=1$ sur $[-3\,;-2[$ et sur $]0\,;2[$: l'ensemble des solutions de $u(x)<1$ est $[-3\,;-2[\,\cup\,]0\,;2[$. La courbe n'est jamais au-dessus de la droite d'équation $y=3$: l'inéquation $u(x)>3$ n'a pas de solution.

Exercice 7

1. $g'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$. La dérivée s'annule en 2 sans changer de signe. La fonction g est strictement croissante, et elle n'a pas d'extrémum en 2.
2. **a.** Vrai. C'est la propriété du cours : f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$, donc $f'(3) = 0$.

   b. Faux. La fonction g de la question 1 en est un contre-exemple.

   c. Vrai. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la condition $f'(a) = 0$ est nécessaire.

   d. Faux. Elle n'est pas suffisante : même contre-exemple.
3. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Comme $4x^2 \geq 0$, le signe est celui de $x - 3$, avec un zéro en 0. On calcule $f(0) = 0$ et $f(3) = 81 - 108 = -27$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	

En 0, la tangente est horizontale, mais f' ne change pas de signe : il n'y a pas d'extrémum. En 3, f' passe de $-$ à $+$: f admet un minimum local, égal à -27.

4. $q'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2)$. Un tableau de signes donne $-, +, -, +$ sur les quatre intervalles délimités par -1, 0 et 2. La fonction q admet donc un minimum local en -1, égal à $q(-1) = -4$, un maximum local en 0, égal à $q(0) = 1$, et un minimum local en 2, égal à $q(2) = -31$.

Correction de BarroTech

Exercice 8

1. $h'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$: les racines de $t^2 - 4t + 3$ sont 1 et 3.
2. On calcule $h(0) = 2$, $h(1) = 6$, $h(3) = 2$ et $h(4) = 6$.

t	0		1		3		4
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

3. L'altitude maximale est de 60 mètres, atteinte après 1 minute et après 4 minutes. L'altitude minimale est de 20 mètres, atteinte au départ et après 3 minutes.
4. Comme $h'(1) = h'(3) = 0$, les tangentes sont horizontales. À ces deux instants, le cerf-volant ne monte ni ne descend : il change de sens.
5. h' est une fonction du second degré, avec $a = 3 > 0$: elle admet un minimum en $-\dfrac{-12}{6} = 2$, égal à $h'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Le cerf-volant descend le plus vite après 2 minutes, à 3 dizaines de mètres par minute, soit 30 mètres par minute.

Exercice 9

1. **a.** $f'(x) = 6x - 12$, nulle en 2. Comme $a = 3 > 0$, f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$, puis croissante sur $[2\,;+\infty[$. Son minimum est $f(2) = 12 - 24 + 7 = -5$, et la courbe est tournée vers le haut.

   b. $g'(x) = -4x + 10$, nulle en $\dfrac{5}{2}$. Comme $a = -2 < 0$, g est croissante, puis décroissante. Son maximum est $g\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{25}{2} + 25 - 3 = \dfrac{19}{2}$, et la courbe est tournée vers le bas.

   c. $k'(x) = x + 3$, nulle en -3. Comme $a = \dfrac{1}{2} > 0$, k est décroissante, puis croissante. Son minimum est $k(-3) = \dfrac{9}{2} - 9 - 1 = -\dfrac{11}{2}$, et la courbe est tournée vers le haut.
2. Le minimum est atteint en 2, donc $f'(2) = 0$, soit $4 + b = 0 : b = -4$. Il vaut 3, donc $f(2) = 4 - 8 + c = 3 : c = 7$. Ainsi, $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
3. $f'(x) = 2ax + 6$, et $f'(3) = 6a + 6 = 0$ donne $a = -1$. Comme $a < 0$, c'est un maximum, égal à $f(3) = -9 + 18 + 1 = 10$.

Exercice 10

1. $h(0) = 2$: le poids quitte la main à 2 mètres de hauteur.
2. $h'(x) = -0{,}2x + 0{,}8$, nulle pour $x = 4$. Comme $a < 0$, c'est un maximum, et $h(4) = -1{,}6 + 3{,}2 + 2 = 3{,}6$. Le poids est le plus haut à 4 mètres du lanceur, à 3,6 mètres de hauteur.
3. On développe : $-0{,}1(x - 10)(x + 2) = -0{,}1(x^2 - 8x - 20) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2 = h(x)$. Le poids retombe quand $h(x) = 0$, avec $x \geq 0$: la seule solution positive est $x = 10$. Il retombe à 10 mètres.
4. On développe : $-0{,}1(x^2 - 8x + 16) + 3{,}6 = -0{,}1x^2 + 0{,}8x - 1{,}6 + 3{,}6 = h(x)$. La forme canonique donne le maximum 3,6, atteint en 4 : c'est le résultat de la question 2.
5. $h'(0) = 0{,}8$ et $h'(10) = -2 + 0{,}8 = -1{,}2$. Ce sont les coefficients directeurs des tangentes à la trajectoire au départ et à l'arrivée : le poids monte au départ, et il descend à l'arrivée, plus fortement.

Une solution de BarroTech

Exercice 11

1. La zone imprimée a pour aire 216, donc sa hauteur vaut $\dfrac{216}{x}$.
2. La page mesure $x+4$ de large et $\dfrac{216}{x}+6$ de haut. Donc
$$A(x) = (x+4)\left(\frac{216}{x}+6\right) = 216 + 6x + \frac{864}{x} + 24 = 240 + 6x + \frac{864}{x}.$$
3. $A'(x) = 6 - \dfrac{864}{x^2} = \dfrac{6(x^2-144)}{x^2} = \dfrac{6(x-12)(x+12)}{x^2}$.
4. Sur $]0\,;+\infty[$, le signe est celui de $x-12$, et $A(12) = 240+72+72 = 384$.

x	0		12		$+\infty$
$A'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
A	‖	$\searrow$	384	$\nearrow$	

5. Le minimum est atteint pour $x = 12$. La zone imprimée mesure alors 12 centimètres sur 18, et la page 16 centimètres sur 24, soit 384 centimètres carrés.

Exercice 12

1. La durée vaut $\dfrac{100}{v}$ heures.
2. $C(v) = \dfrac{100}{v}\left(2v^2+200\right) = 200v + \dfrac{20\,000}{v}$.
3. $C'(v) = 200 - \dfrac{20\,000}{v^2} = \dfrac{200(v^2-100)}{v^2} = \dfrac{200(v-10)(v+10)}{v^2}$.
4. Sur $[5\,;20]$, le signe est celui de $v-10$. On calcule $C(5) = 1\,000 + 4\,000 = 5\,000$, $C(10) = 2\,000 + 2\,000 = 4\,000$ et $C(20) = 4\,000 + 1\,000 = 5\,000$.

v	5		10		20
$C'(v)$		$-$	0	$+$	
C	$5\,000$	$\searrow$	$4\,000$	$\nearrow$	$5\,000$

Le coût est minimal à 10 kilomètres par heure, et il vaut $4\,000$ euros.

5. Sur $[5\,;8]$, C est décroissante : le minimum est atteint en 8. La péniche doit rouler à la vitesse maximale autorisée, et $C(8) = 1\,600 + 2\,500 = 4\,100$ euros.

Une solution de BarroTech

Exercice 13

1. Soit $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Alors $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$, dont le signe est celui de $x-3$. La fonction f est décroissante sur $]0\,;3]$, puis croissante sur $[3\,;+\infty[$. Son minimum est $f(3) = 6$. Donc, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{9}{x} \geq 6$, avec égalité pour $x = 3$ seulement.
2. **a.** $d'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$. Sur $[0\,;+\infty[$, le signe est celui de $x-2$: d est décroissante sur $[0\,;2]$, puis croissante sur $[2\,;+\infty[$.

   b. Le minimum de d est $d(2) = 8 - 24 + 16 = 0$. Donc $d(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $x^3 + 16 \geq 12x$.

   c. Non : pour $x = -5$, $x^3 + 16 = -109$ et $12x = -60$, et $-109 < -60$. L'inégalité n'est démontrée que sur $[0\,;+\infty[$.
3. Sur $]0\,;+\infty[$, $d'(x) = 1 - \dfrac{4}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$. Le signe est celui de $\sqrt{x} - 2$: négatif sur $]0\,;4[$, positif sur $]4\,;+\infty[$. Le minimum de d est $d(4) = 4 + 4 - 8 = 0$, donc $d(x) \geq 0$ sur $]0\,;+\infty[$. En 0 aussi : $0 \leq 4$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $4\sqrt{x} \leq x + 4$.

Exercice 14

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $[-1\,;2]$: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

x	-1		1		2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

solution de BarroTech

2. Le minimum de f sur $[-1\,;2]$ est -2, et son maximum est 2. Donc, pour tout x de $[-1\,;2]$, $-2 \leq f(x) \leq 2$.
3. La longueur vaut $\dfrac{16}{x}$, donc $P(x) = 2\left(x + \dfrac{16}{x}\right) = 2x + \dfrac{32}{x}$.
4. $P'(x) = 2 - \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{2(x-4)(x+4)}{x^2}$, dont le signe est celui de $x - 4$ sur $]0\,;+\infty[$. Le minimum de P est $P(4) = 8 + 8 = 16$. Donc $P(x) \geq 16$ pour tout $x > 0$.
5. L'ourlet est le plus court pour $x = 4$: la largeur vaut 4 mètres, la longueur $\dfrac{16}{4} = 4$ mètres. La bâche est un carré de 4 mètres de côté, et l'ourlet mesure 16 mètres.

Exercice 15

1. $d(x) = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$. Comme $a = 1 > 0$, $d(x)$ est positif à l'extérieur des racines. La courbe de f est au-dessus de celle de g sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]4\,;+\infty[$, et au-dessous sur $]-1\,;4[$. Les points communs sont $(-1\,;2)$ et $(4\,;7)$.
2. $d(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Le signe est celui de x, avec un zéro en 1. La courbe de f est au-dessous de celle de g sur $]-\infty\,;0[$, et au-dessus sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. Les points communs sont $(0\,;0)$ et $(1\,;2)$.
3. $d(x) = \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, le signe est celui de $1-x$. La courbe de f est au-dessus de celle de g sur $]0\,;1[$, et au-dessous sur $]1\,;+\infty[$. Le point commun est $(1\,;1)$.
4. $d(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, et $d'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Sur $[0\,;+\infty[$, d est décroissante sur $[0\,;2]$, puis croissante sur $[2\,;+\infty[$. Le minimum est $d(2) = 8 - 12 + 4 = 0$. Donc $d(x) \geq 0$: la courbe de f est au-dessus de celle de g sur $[0\,;+\infty[$, avec un seul point commun, $(2\,;8)$.

Exercice 16

1. **a.** $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$. La tangente a pour équation $y = a^2 + 2a(x-a)$, soit $y = 2ax - a^2$.

   b. $x^2 - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \geq 0$. La courbe est donc au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. **a.** $f(4) = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4)$, soit $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

   Une solution de BarroTech

   b. On développe : $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(x - 4\sqrt{x} + 4\right) = \dfrac{1}{4}x - \sqrt{x} + 1$.

   c. Cette expression est positive ou nulle : $\dfrac{1}{4}x + 1 \geq \sqrt{x}$. La courbe est au-dessous de sa tangente, et elle ne la touche qu'au point d'abscisse 4.
3. **a.** $f(2) = 2$, et $f'(x) = 3x^2 - 3$ donne $f'(2) = 9$. La tangente a pour équation $y = 2 + 9(x-2)$, soit $y = 9x - 16$.

   b. $(x-2)^2(x+4) = (x^2 - 4x + 4)(x+4) = x^3 - 12x + 16$, et $f(x) - (9x - 16) = x^3 - 12x + 16$.

   c. Le signe est celui de $x + 4$, avec un zéro en 2. La courbe est au-dessus de sa tangente sur $]-4\,;+\infty[$, sauf en 2 où elle la touche, et au-dessous sur $]-\infty\,;-4[$. La tangente recoupe la courbe au point d'abscisse -4, de coordonnées $(-4\,;-52)$.

Exercice 17

1. **a.** $f'(x) = 2x$. On a $x_1 = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$. Puis $f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{49}{16} - 3 = \dfrac{1}{16}$ et $f'\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{2}$, donc $x_2 = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{56} = \dfrac{97}{56}$.

   b. Arrondis au dix-millième, les deux nombres coïncident : dès la deuxième étape, x_2 est très proche de $\sqrt{3}$.

   c. $f'(0) = 0$: la tangente est horizontale, elle ne coupe pas l'axe des abscisses. La formule diviserait par zéro.
2. $x_n - \dfrac{x_n^2 - A}{2x_n} = \dfrac{2x_n^2 - x_n^2 + A}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 + A}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{A}{x_n}\right)$.
3. $f'(x) = 3x^2$. On a $x_1 = 1 - \dfrac{-1}{3} = \dfrac{4}{3}$. Puis $x_2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{\frac{64}{27} - 2}{\frac{16}{3}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{10}{27} \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{72} = \dfrac{91}{72}$. On approche le nombre dont le cube vaut 2.

Exercice 18

1. On écrit :

```
def f(x):
    return x**3 - 2*x - 5

def df(x):
    return 3*x**2 - 2
```

Une solution de BarroTech

2. $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1$ et $f'(2) = 12 - 2 = 10$, donc le terme suivant vaut $2 - \dfrac{-1}{10} = 2{,}1$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 2$. Sur $[2\,;3]$, $3x^2 \geq 12$, donc $f'(x) \geq 10 > 0$: f est strictement croissante sur cet intervalle.
4. La fonction applique la formule de Newton tant que la valeur absolue de $f(x)$ dépasse `e`. Elle renvoie le nombre d'étapes effectuées.
5. Il faut 2 étapes pour obtenir $|f(x)| \leq 0{,}001$, et 3 étapes pour obtenir $|f(x)| \leq 0{,}000001$. Une seule étape de plus permet de gagner un facteur mille : la méthode est très rapide.