Fonction dérivée

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée.

Leçon 1 : fonction dérivée, fonctions carré et cube

Exercice 1 : utiliser la fonction dérivée

On note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

1. Calculer $f'(4)$, $f'(-3)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $g'(2)$, $g'(-1)$, $g'\left(\frac{1}{3}\right)$ et $g'(0)$.
3. Pour quelle valeur de x a-t-on $f'(x) = 10$? Pour quelles valeurs de x a-t-on $g'(x) = 27$?
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3, puis de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.
5. Soit $k(x) = x^2 + 4x$. En reprenant la démonstration du cours, montrer que le taux de variation de k entre a et $a + h$ vaut $2a + 4 + h$, pour $h \neq 0$. En déduire $k'(x)$.

Exercice 2 : une mosaïque et un glaçon

Une création de BarroTech

Partie A. Une mosaïque carrée a pour côté x mètres. Son aire, en mètres carrés, est $A(x) = x^2$.

1. Calculer $A'(3)$ et préciser son unité.
2. Le côté passe de 3 mètres à $3{,}02$ mètres. Avec l'approximation linéaire, donner une valeur approchée de la nouvelle aire.
3. La valeur exacte est $3{,}02^2 = 9{,}1204$. À quoi correspond l'écart de $0{,}0004$ sur la figure du carré ?

Partie B. Un glaçon cubique a pour côté x centimètres. Son volume, en centimètres cubes, est $V(x) = x^3$.

4. Calculer $V'(3)$ et préciser son unité.
5. Le glaçon fond, et son côté passe de 3 à $2{,}9$ centimètres. Donner une valeur approchée du volume perdu. On donne $2{,}9^3 = 24{,}389$: calculer le volume perdu exact, et comparer.

Leçon 2 : fonction inverse

Exercice 3 : calculer avec la fonction inverse

On note $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(4)$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2, puis au point d'abscisse -2. Que peut-on dire de ces deux droites ?
3. En quels points de la courbe la tangente a-t-elle pour coefficient directeur -4 ? Existe-t-il un point où elle a pour coefficient directeur 1 ?
4. En reprenant la démonstration du cours, calculer le taux de variation de f entre 3 et $3+h$. En déduire $f'(3)$.

Exercice 4 : valeurs approchées, vrai ou faux

On note $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Avec l'approximation linéaire, donner une valeur approchée de chaque nombre.
   - **a.** $\dfrac{1}{1{,}02}$, avec $a = 1$
   - **b.** $\dfrac{1}{0{,}98}$, avec $a = 1$
   - **c.** $\dfrac{1}{2{,}1}$, avec $a = 2$
   - **d.** $\dfrac{1}{3{,}9}$, avec $a = 4$
2. Dire si chaque proposition est vraie ou fausse, et justifier.
   - **a.** Pour tout x non nul, $f'(x) < 0$.
   - **b.** La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Il existe un point de la courbe où la tangente est horizontale.
   - **d.** Pour tout a non nul, les tangentes aux points d'abscisses a et $-a$ sont parallèles.

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : fonction racine carrée

Exercice 5 : calculer avec la racine carrée

On note $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(16)$, $f'(25)$, $f'\left(\dfrac{1}{9}\right)$ et $f'(100)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 4, puis au point d'abscisse 9.
3. Avec l'approximation linéaire, donner une valeur approchée de $\sqrt{4{,}2}$, de $\sqrt{8{,}7}$ et de $\sqrt{100{,}5}$.
4. En quel point de la courbe la tangente a-t-elle pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$? Et 1 ?

Exercice 6 : autour de zéro, et une dalle

1. On note $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer le taux de variation de f entre 0 et h pour $h = 0{,}04$, pour $h = 0{,}0025$ et pour $h = 0{,}0001$.
2. Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.
3. Soit $g(x) = x\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer le taux de variation de g entre 0 et h, pour $h > 0$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
4. Une dalle carrée a pour aire A, en mètres carrés. Son côté, en mètres, est $c(A) = \sqrt{A}$. Calculer $c(400)$ et $c'(400)$. Préciser l'unité de $c'(400)$.
5. On ajoute 8 mètres carrés à une dalle de 400 mètres carrés. Donner une valeur approchée du nouveau côté.

Leçon 4 : fonction valeur absolue

Exercice 7 : une valeur absolue décalée

1. Calculer $|-7|$ et $|2-5|$. Écrire sans barres $|4-\pi|$ et $|1-\sqrt{2}|$.
2. Soit $f(x) = |x-3|$. Écrire $f(x)$ sans barres, pour $x \geq 3$, puis pour $x \leq 3$.
3. Tracer la courbe de f pour x entre 0 et 6.
4. Donner $f'(x)$ sur $]3\,;+\infty[$, puis sur $]-\infty\,;3[$.
5. Montrer que, pour $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 3 et $3+h$ vaut $\dfrac{|h|}{h}$. En raisonnant par disjonction des cas, montrer que f n'est pas dérivable en 3.

Une solution de Barrolech

Exercice 8 : vrai ou faux, et un bateau

1. Dire si chaque proposition est vraie ou fausse, et justifier. Un contre-exemple suffit pour montrer qu'une proposition est fausse.
   - **a.** Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** La courbe de la fonction valeur absolue a une tangente en chacun de ses points.
   - **c.** La fonction $x \mapsto x\,|x|$ est dérivable en 0.
   - **d.** Si une fonction est définie en 0 et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, alors elle est dérivable en 0.
2. Écrire la négation de la proposition « f est dérivable en tout nombre de I ».
3. Un bateau passe sous un pont à l'instant $t = 0$, à la vitesse de 5 mètres par seconde. Sa distance au pont, en mètres, est $d(t) = 5\,|t|$, où t est en secondes.
   - **a.** Calculer le taux de variation de d entre -4 et -2, puis entre 2 et 4.
   - **b.** Calculer le taux de variation de d entre -2 et 2. Le bateau est-il immobile entre ces deux instants ?

Leçon 5 : dérivée d'une somme et d'un produit

Exercice 9 : dériver, et une démonstration

Dans les questions 1 à 7, calculer la fonction dérivée de chaque fonction. Sauf mention contraire, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$
2. $g(x) = -x^3 + 5x^2 - x$
3. $k(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + \dfrac{1}{4}$
4. $\ell(x) = (2x - 1)(x + 4)$
5. $m(x) = x^2(3x - 5)$
6. $n(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
7. $p(x) = (4x - 1)^2$, en l'écrivant comme un produit
8. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Démontrer que $(uv)' = u'v + uv'$.

Exercice 10 : tangentes, et une patinoire

Partie A. Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.
3. En quel point de la courbe la tangente est-elle horizontale ?
4. En quel point de la courbe la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 7$? Donner son équation réduite.

Une solution de BarmTech

Partie B. Une patinoire vend 400 entrées par jour à 8 euros. Le gérant estime qu'une hausse de x euros du prix fait perdre $30x$ entrées. La recette, en euros, est alors $R(x) = (8 + x)(400 - 30x)$, avec $0 \leq x \leq 5$.

5. Calculer $R(0)$, puis $R(1)$.
6. Avec la formule du produit, calculer $R'(x)$.
7. Calculer $R'(1)$ et $R'(3)$. Que signifie chacun de ces deux nombres pour le gérant ?
8. Avec l'approximation linéaire, donner une valeur approchée de $R(1{,}1)$.

Leçon 6 : dérivée de l'inverse et du quotient

Exercice 11 : dériver

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{3x-6}$ sur $]2\,;+\infty[$
3. $k(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
4. $\ell(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $m(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$
6. $n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, de deux façons : avec la formule du quotient, puis après avoir simplifié.

Exercice 12 : un autocar, et une erreur

Partie A. Un autocar fait un aller à 60 kilomètres par heure, puis le même trajet au retour à x kilomètres par heure. Sa vitesse moyenne sur l'aller-retour, en kilomètres par heure, est

$$v(x) = \frac{120x}{x+60}, \quad \text{avec } x > 0.$$

1. Calculer $v(60)$, $v(30)$ et $v(90)$.
2. Montrer que $v'(x) = \dfrac{7200}{(x+60)^2}$.
3. Calculer $v'(60)$. Avec l'approximation linéaire, en déduire une valeur approchée de $v(62)$.

Une solution de BarroTech

Partie B. Un élève écrit : « Si $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{1} = 1$. »

4. Expliquer son erreur.
5. Calculer $f'(x)$, puis $f'(1)$.

Leçon 7 : puissances entières, calculer une dérivée

Exercice 13 : choisir la bonne formule

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction. Sauf mention contraire, on travaille sur $]0\,;+\infty[$.

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = x^{-3}$
3. $k(x) = \dfrac{4}{x^2}$
4. $\ell(x) = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x}$
5. $m(x) = x^2\sqrt{x}$
6. $n(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$, de deux façons
7. $p(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$, en développant d'abord

Exercice 14 : une éolienne et une boîte

Partie A. La puissance d'une petite éolienne, en kilowatts, est modélisée par $P(v) = 0{,}2\,v^3$, où v est la vitesse du vent en mètres par seconde.

1. Calculer $P(10)$.
2. Calculer $P'(v)$, puis $P'(10)$. Préciser l'unité.
3. Le vent passe de 10 à $10{,}5$ mètres par seconde. Donner une valeur approchée de la nouvelle puissance.

Une solution de BarroTech

Partie B. Une boîte fermée a une base carrée de côté x centimètres, une hauteur de y centimètres, et un volume de 1000 centimètres cubes.

4. Exprimer y en fonction de x. Montrer que l'aire totale de la boîte, en centimètres carrés, est $S(x) = 2x^2 + \dfrac{4000}{x}$, pour $x > 0$.
5. Calculer $S'(x)$.
6. Calculer $S'(5)$, $S'(10)$ et $S'(20)$. Que peut-on dire de la tangente à la courbe de S au point d'abscisse 10 ?
7. Montrer que $S'(x) = \dfrac{4(x^3 - 1000)}{x^2}$.