Fonction dérivée

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. On a $f'(x) = 2x$, donc $f'(4) = 8$, $f'(-3) = -6$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f'(0) = 0$.
2. On a $g'(x) = 3x^2$, donc $g'(2) = 12$, $g'(-1) = 3$, $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ et $g'(0) = 0$.
3. L'équation $2x = 10$ a pour solution $x = 5$. L'équation $3x^2 = 27$ équivaut à $x^2 = 9$: elle a deux solutions, 3 et -3.
4. $f(-3) = 9$ et $f'(-3) = -6$, donc la tangente a pour équation $y = 9 - 6(x + 3)$, soit $y = -6x - 9$.
   $g(1) = 1$ et $g'(1) = 3$, donc la tangente a pour équation $y = 1 + 3(x - 1)$, soit $y = 3x - 2$.
5. Pour $h \neq 0$:
$$\frac{k(a+h) - k(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 + 4(a+h) - a^2 - 4a}{h} = \frac{2ah + h^2 + 4h}{h} = 2a + 4 + h.$$
   Quand h se rapproche de 0, ce taux se rapproche de $2a + 4$, pour tout réel a. Donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 2x + 4$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. $A'(x) = 2x$, donc $A'(3) = 6$. L'unité est le mètre carré par mètre.
2. Avec $h = 0{,}02$: $A(3{,}02) \approx 9 + 6 \times 0{,}02 = 9{,}12$. La nouvelle aire vaut environ $9{,}12$ mètres carrés.
3. L'approximation compte les deux bandes, d'aire $3 \times 0{,}02$ chacune. Elle oublie le petit carré du coin, d'aire $0{,}02^2 = 0{,}0004$. C'est exactement l'écart.
4. $V'(x) = 3x^2$, donc $V'(3) = 27$. L'unité est le centimètre cube par centimètre.
5. Avec $h = -0{,}1$: $V(2{,}9) \approx 27 + 27 \times (-0{,}1) = 24{,}3$. Le volume perdu vaut environ $2{,}7$ centimètres cubes. Le volume perdu exact est $27 - 24{,}389 = 2{,}611$ centimètres cubes, ce qui est proche.

Exercice 3

1. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc $f'(1) = -1$, $f'(-1) = -1$, $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$ et $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = -9$.

2. On a $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2)$, soit $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.
On a $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(-2) = -\dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x+2)$, soit $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$. Ces deux droites ont le même coefficient directeur : elles sont parallèles.

3. L'équation $-\dfrac{1}{x^2} = -4$ équivaut à $x^2 = \dfrac{1}{4}$, soit $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$. Ce sont les points $\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$. Il n'existe aucun point où le coefficient directeur vaut 1, car $-\dfrac{1}{x^2}$ est toujours négatif.

4. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3} = \frac{3-(3+h)}{3(3+h)} = \frac{-h}{3(3+h)}.$$

Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\dfrac{-1}{3(3+h)}$. Quand h se rapproche de 0, il se rapproche de $-\dfrac{1}{9}$. Donc $f'(3) = -\dfrac{1}{9}$.

Exercice 4

1. a. Avec $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$ et $h = 0{,}02$: $\dfrac{1}{1{,}02} \approx 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Une solution Barrolech

b. Avec $h = -0{,}02$: $\dfrac{1}{0{,}98} \approx 1 + 0{,}02 = 1{,}02$.

c. Avec $f(2) = 0{,}5$, $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$ et $h = 0{,}1$: $\dfrac{1}{2{,}1} \approx 0{,}5 - 0{,}025 = 0{,}475$.

d. Avec $f(4) = 0{,}25$, $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$ et $h = -0{,}1$: $\dfrac{1}{3{,}9} \approx 0{,}25 + \dfrac{0{,}1}{16} = 0{,}25625$.

2. a. Vrai : $x^2 > 0$, donc $-\dfrac{1}{x^2} < 0$ pour tout x non nul.

b. Faux : la fonction inverse n'est pas définie en 0. Elle est dérivable sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

c. Faux : une tangente horizontale demanderait $f'(x) = 0$, or $-\dfrac{1}{x^2}$ ne s'annule jamais.

d. Vrai : $f'(-a) = -\dfrac{1}{(-a)^2} = -\dfrac{1}{a^2} = f'(a)$. Les deux tangentes ont le même coefficient directeur.

Exercice 5

1. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$, $f'(16) = \dfrac{1}{8}$, $f'(25) = \dfrac{1}{10}$, $f'\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{2 \times \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$ et $f'(100) = \dfrac{1}{20}$.
2. Au point d'abscisse 4 : $y = 2 + \dfrac{1}{4}(x - 4)$, soit $y = \dfrac{1}{4}x + 1$. Au point d'abscisse 9 : $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x - 9)$, soit $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{2}$.
3. $\sqrt{4{,}2} \approx 2 + \dfrac{1}{4} \times 0{,}2 = 2{,}05$. Puis $\sqrt{8{,}7} \approx 3 + \dfrac{1}{6} \times (-0{,}3) = 2{,}95$. Enfin $\sqrt{100{,}5} \approx 10 + \dfrac{1}{20} \times 0{,}5 = 10{,}025$.
4. L'équation $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $\sqrt{x} = 1$, soit $x = 1$: c'est le point $(1\,;1)$. L'équation $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ équivaut à $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$, soit $x = \dfrac{1}{4}$: c'est le point $\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 6

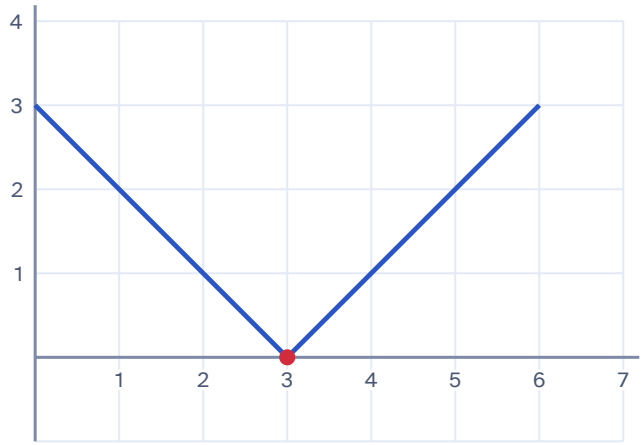
1. Pour $h > 0$, le taux vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$. On trouve $\dfrac{1}{0{,}2} = 5$, puis $\dfrac{1}{0{,}05} = 20$, puis $\dfrac{1}{0{,}01} = 100$.
2. Pour $h > 0$: $\dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Quand h se rapproche de 0, $\sqrt{h}$ se rapproche de 0 et ce taux devient aussi grand qu'on veut. Il ne se rapproche d'aucun nombre : f n'est pas dérivable en 0.

Une solution de BarroTech

3. Pour $h > 0$: $\dfrac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h}$. Quand h se rapproche de 0, ce taux se rapproche de 0. Donc g est dérivable en 0, et $g'(0) = 0$.
4. On a $c(400) = 20$ et $c'(400) = \dfrac{1}{2\sqrt{400}} = \dfrac{1}{40}$. L'unité est le mètre par mètre carré.
5. Avec $h = 8$: $c(408) \approx 20 + 8 \times \dfrac{1}{40} = 20{,}2$. Le nouveau côté mesure environ $20{,}2$ mètres.

Exercice 7

1. $|-7| = 7$ et $|2-5| = |-3| = 3$. Comme $\pi < 4$, le nombre $4-\pi$ est positif : $|4-\pi| = 4-\pi$. Comme $\sqrt{2} > 1$, le nombre $1-\sqrt{2}$ est négatif : $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.
2. Si $x \geq 3$, alors $x-3 \geq 0$ et $f(x) = x-3$. Si $x \leq 3$, alors $x-3 \leq 0$ et $f(x) = 3-x$.
3. La courbe est formée de deux demi-droites issues du point $(3\,;0)$.



4. Sur $]3\,;+\infty[$, $f(x) = x-3$ et $f'(x) = 1$. Sur $]-\infty\,;3[$, $f(x) = 3-x$ et $f'(x) = -1$.
5. Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{|3+h-3|-0}{h} = \dfrac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, ce taux vaut 1. Si $h < 0$, il vaut -1. Quand h se rapproche de 0, il ne se rapproche donc pas d'un seul nombre : f n'est pas dérivable en 3.

Une solution de Barrolech

Exercice 8

1. **a.** Faux. Contre-exemple : la fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, et elle n'est pas dérivable en 0.

   b. Faux. Il n'y a pas de tangente à l'origine.

   c. Vrai. Pour $h \neq 0$, le taux entre 0 et h vaut $\dfrac{h\,|h|-0}{h} = |h|$, qui se rapproche de 0. La fonction est dérivable en 0, et son nombre dérivé vaut 0.

   d. Faux. Contre-exemple : la fonction racine carrée est définie en 0 et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, mais elle n'est pas dérivable en 0.
2. La négation est : « il existe au moins un nombre de I en lequel f n'est pas dérivable ».
3. **a.** On a $d(-4) = 20$, $d(-2) = 10$, $d(2) = 10$ et $d(4) = 20$. Entre -4 et -2, le taux vaut $\dfrac{10-20}{2} = -5$. Entre 2 et 4, il vaut $\dfrac{20-10}{2} = 5$.

   b. Entre -2 et 2, le taux vaut $\dfrac{10-10}{4} = 0$. Le bateau n'est pas immobile : il s'approche du pont, puis il s'en éloigne. Un taux n'est qu'une moyenne entre deux instants.

Exercice 9

1. $f'(x) = 8x - 7$.
2. $g'(x) = -3x^2 + 10x - 1$.
3. $k'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - 3 = x - 3$.
4. Avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x + 4$: $\ell'(x) = 2(x + 4) + (2x - 1) \times 1 = 4x + 7$.
5. Avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x - 5$: $m'(x) = 2x(3x - 5) + x^2 \times 3 = 9x^2 - 10x$.
6. Avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$: $n'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x + 1}{2\sqrt{x}}$. En réduisant au même dénominateur : $n'(x) = \dfrac{2x + x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x + 1}{2\sqrt{x}}$.
7. On écrit $p(x) = (4x - 1)(4x - 1)$, avec $u' = v' = 4$: $p'(x) = 4(4x - 1) + (4x - 1) \times 4 = 8(4x - 1) = 32x - 8$.
8. Soit a dans I et h non nul tel que $a + h$ soit dans I. En ajoutant et en retirant $u(a)\,v(a + h)$ au numérateur, le taux de variation de uv s'écrit

$$\frac{u(a + h) - u(a)}{h} \times v(a + h) + u(a) \times \frac{v(a + h) - v(a)}{h}.$$

Quand h se rapproche de 0, les deux quotients se rapprochent de $u'(a)$ et de $v'(a)$. De plus, $v(a + h) = v(a) + h \times \dfrac{v(a + h) - v(a)}{h}$ se rapproche de $v(a)$. Le taux se rapproche donc de $u'(a)\,v(a) + u(a)\,v'(a)$.

Une solution de BarroTech

Exercice 10

1. $f'(x) = 2x - 6$.
2. On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -4$. La tangente a pour équation $y = -4(x - 1)$, soit $y = -4x + 4$.
3. La tangente est horizontale quand $f'(x) = 0$, soit $x = 3$. Comme $f(3) = -4$, c'est le point $(3\,;-4)$.
4. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur. On résout $2x - 6 = 2$, soit $x = 4$. Comme $f(4) = -3$, c'est le point $(4\,;-3)$. La tangente a pour équation $y = -3 + 2(x - 4)$, soit $y = 2x - 11$.
5. $R(0) = 8 \times 400 = 3200$ et $R(1) = 9 \times 370 = 3330$.
6. Avec $u(x) = 8 + x$ et $v(x) = 400 - 30x$: $R'(x) = 1 \times (400 - 30x) + (8 + x) \times (-30) = 400 - 30x - 240 - 30x = 160 - 60x$.
7. $R'(1) = 100$: quand la hausse est de 1 euro, une petite hausse de plus augmente la recette, d'environ 100 euros par euro de hausse. $R'(3) = -20$: quand la hausse est de 3 euros, une petite hausse de plus fait baisser la recette, d'environ 20 euros par euro de hausse.
8. $R(1{,}1) \approx 3330 + 100 \times 0{,}1 = 3340$. La recette vaut environ 3340 euros.

Exercice 11

1. Avec $v(x) = x^2 + 3$, qui ne s'annule pas : $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$.
2. Avec $v(x) = 3x - 6$, qui ne s'annule pas sur $]2\,;+\infty[$: $g'(x) = -\dfrac{3}{(3x-6)^2}$.
3. $k'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x - 1 - x - 2}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.
4. $\ell'(x) = \dfrac{3(x^2+1) - 3x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$.
5. $m'(x) = \dfrac{2x(2x+1) - x^2 \times 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$.
6. Avec la formule du quotient :

$$n'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}.$$

Après simplification : $n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La formule de l'inverse donne

$$n'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Ces deux écritures sont égales, car $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{x \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Exercice 12

Une solution de BarroTech

1. $v(60) = \dfrac{7200}{120} = 60$, $v(30) = \dfrac{3600}{90} = 40$ et $v(90) = \dfrac{10800}{150} = 72$.
2. Avec $u(x) = 120x$ et $w(x) = x + 60$:

$$v'(x) = \frac{120(x+60) - 120x \times 1}{(x+60)^2} = \frac{7200}{(x+60)^2}.$$

3. $v'(60) = \dfrac{7200}{14400} = \dfrac{1}{2}$. Donc $v(62) \approx 60 + \dfrac{1}{2} \times 2 = 61$. La vitesse moyenne vaut environ 61 kilomètres par heure.
4. L'élève a divisé la dérivée du numérateur par la dérivée du dénominateur. Or la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées.
5. $f'(x) = \dfrac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{4}$, et non 1.

Exercice 13

1. $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$.
2. $g'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.
3. $k(x) = 4x^{-2}$, donc $k'(x) = -8x^{-3} = -\dfrac{8}{x^3}$.
4. $\ell(x) = x^{-4} - x^{-1}$, donc $\ell'(x) = -4x^{-5} + x^{-2} = -\dfrac{4}{x^5} + \dfrac{1}{x^2}$.
5. Avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$: $m'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$. Or $\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{x\sqrt{x}}{2}$. Donc $m'(x) = \dfrac{5}{2}\,x\sqrt{x}$.
6. Avec la formule du quotient : $n'(x) = \dfrac{3x^2 \times x - (x^3 + 2)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$. En simplifiant d'abord : $n(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, donc $n'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$. Les deux écritures sont égales.
7. $p(x) = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + 2 + x^{-2}$, donc $p'(x) = 2x - 2x^{-3} = 2x - \dfrac{2}{x^3}$.

Exercice 14

1. $P(10) = 0{,}2 \times 1000 = 200$ kilowatts.
2. $P'(v) = 0{,}2 \times 3v^2 = 0{,}6\,v^2$, donc $P'(10) = 60$. L'unité est le kilowatt par mètre par seconde.
3. Avec $h = 0{,}5$: $P(10{,}5) \approx 200 + 60 \times 0{,}5 = 230$. La nouvelle puissance vaut environ 230 kilowatts.
4. Le volume donne $x^2 y = 1000$, soit $y = \dfrac{1000}{x^2}$.

   Une solution de BarroTech

   L'aire totale est formée de deux carrés et de quatre rectangles : $S(x) = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + \dfrac{4000}{x}$.
5. $S'(x) = 4x - \dfrac{4000}{x^2}$.
6. $S'(5) = 20 - 160 = -140$, $S'(10) = 40 - 40 = 0$ et $S'(20) = 80 - 10 = 70$. Comme $S'(10) = 0$, la tangente au point d'abscisse 10 est horizontale.
7. On réduit au même dénominateur : $4x - \dfrac{4000}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 4000}{x^2} = \dfrac{4(x^3 - 1000)}{x^2}$.