Nombre dérivé et tangente

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée. Les programmes Python se lisent à la main, et peuvent ensuite être testés.

Leçon 1 : taux de variation et pente d'une sécante

Exercice 1 : calculer des taux et des pentes

1. Calculer le taux de variation de chaque fonction entre les deux nombres donnés.
   - **a.** $f(x) = x^2 - 2x$, entre 1 et 4
   - **b.** $g(x) = \dfrac{1}{x}$, entre 2 et 4
   - **c.** $k(x) = -3x + 5$, entre -1 et 6
   - **d.** $m(x) = x^2$, entre -3 et 3
2. Que peut-on dire de la fonction m d'après le résultat de la question 1.d ?
3. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
   - **a.** $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;10)$
   - **b.** $A(2\,;5)$ et $B(-2\,;7)$

Une solution de BarroTech

4. Les points $A(1\,;-1)$ et $B(4\,;8)$ sont sur la courbe de f de la question 1.a. Donner la pente de la sécante (AB), puis son équation réduite.

Exercice 2 : la crue d'une rivière

Après de fortes pluies, on relève la hauteur d'une rivière à une station de mesure.

t **(heures après le début des relevés)**	0	2	4	6	10	24
hauteur (m)	$1{,}2$	$1{,}8$	$2{,}9$	$3{,}3$	$3{,}5$	$1{,}2$

1. Calculer le taux de variation de la hauteur entre 0 et 2, entre 2 et 4, puis entre 6 et 10. Préciser l'unité.
2. Pendant laquelle de ces trois périodes la rivière monte-t-elle le plus vite, en moyenne ?
3. Calculer le taux de variation entre 0 et 24. Peut-on en conclure que la hauteur n'a pas changé pendant cette journée ?
4. Calculer le taux de variation entre 10 et 24, et interpréter son signe.

Leçon 2 : nombre dérivé

Exercice 3 : calculer un nombre dérivé

Pour chaque fonction, calculer le taux de variation entre a et $a+h$, avec $h \neq 0$, puis en déduire le nombre dérivé en a.

1. $f(x) = x^2 + x$, avec $a = 1$
2. $g(x) = 3 - x^2$, avec $a = 2$
3. $k(x) = 2x^2 - x + 1$, avec $a = -1$
4. $\ell(x) = \dfrac{1}{x}$, avec $a = 4$
5. $u(x) = 5x - 2$, avec $a = 3$

Exercice 4 : des valeurs à la conjecture

1. Voici des valeurs du taux de variation de la fonction racine carrée entre 4 et $4+h$, arrondies.

h	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$
taux	$0{,}2485$	$0{,}2498$	$0{,}2500$

   Quelle valeur du nombre dérivé en 4 peut-on conjecturer ?

2. On admet que, pour tout réel h, $(2+h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$. Soit $c(x) = x^3$. Calculer le taux de variation de c entre 2 et $2+h$, puis $c'(2)$.

Une solution de BarroTech

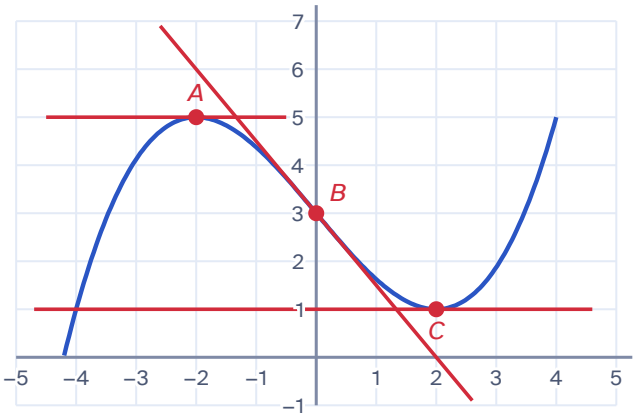
3. Un élève écrit : « Pour trouver $f'(1)$, je remplace h par 0 dans $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. » Expliquer son erreur.

4. Le taux de variation d'une fonction f entre 3 et $3+h$ vaut $h^2 - 2h + 4$ pour tout $h \neq 0$. Que vaut $f'(3)$?

Leçon 3 : tangente à une courbe

Exercice 5 : lire sur un graphique

Voici la courbe d'une fonction f et ses tangentes aux points A, B et C, d'abscisses -2, 0 et 2.



1. Lire $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.
2. Lire $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
3. Lire l'équation réduite de la tangente en B.
4. Sur la figure, la tangente en C recoupe-t-elle la courbe ? Qu'en penser ?

Exercice 6 : tracer et construire

Une solution de BarroTech

1. Dans un repère, tracer les droites suivantes.
   - **a.** La droite d'équation $y = -2x + 3$
   - **b.** La droite passant par $A(1\,;2)$, de coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$
2. Dans un autre repère, placer les points et construire les tangentes à la courbe d'une fonction f, sachant que :
   - **a.** $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$
   - **b.** $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$
   - **c.** $f(3) = 4$ et $f'(3) = \dfrac{1}{2}$
   - **d.** $f(5) = 3$ et $f'(5) = -\dfrac{3}{2}$
3. Peut-on avoir, pour une même fonction f, à la fois $f(2) = 1$, et une tangente au point d'abscisse 2 d'équation $y = 3x - 4$? Et avec $y = 3x - 5$?

Leçon 4 : équation de la tangente

Exercice 7 : écrire une équation de tangente

1. Soit $f(x) = x^2$. Calculer $f'(-2)$ à l'aide du taux de variation, puis déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -2.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2.
3. Déterminer, dans chaque cas, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
   - **a.** $a = 3$, $f(3) = -1$ et $f'(3) = 2$
   - **b.** $a = -2$, $f(-2) = 4$ et $f'(-2) = -\dfrac{1}{2}$
   - **c.** $a = 0$, $f(0) = 5$ et $f'(0) = -3$
   - **d.** $a = 1$, $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$

Exercice 8 : refaire la démonstration, lire dans l'autre sens

1. Une fonction f vérifie $f(2) = 3$ et $f'(2) = 4$. Sans utiliser la formule du cours, en partant de $y = mx + p$, déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2. Vérifier ensuite avec la formule.
2. La tangente à la courbe d'une fonction g au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + 5$. Donner $g'(-1)$ et $g(-1)$.
3. Soit $f(x) = x^2$. On rappelle que $f'(1) = 2$, et on admet que $f'(-1) = -2$.
   - **a.** Déterminer les équations réduites des tangentes aux points d'abscisses 1 et -1.
   - **b.** Trouver leur point d'intersection.

Une solution de Barrolech

Leçon 5 : approximation linéaire

Exercice 9 : calculer de tête

1. En utilisant $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$, donner une valeur approchée de $1{,}003^2$ et de $0{,}98^2$.
2. En utilisant $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}05}$ et de $\dfrac{1}{0{,}97}$.
3. En utilisant $\sqrt{1+h} \approx 1 + 0{,}5h$, donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}06}$ et de $\sqrt{0{,}96}$.
4. Une fonction f vérifie $f(3) = 7$ et $f'(3) = -2$. Donner une valeur approchée de $f(3{,}1)$ et de $f(2{,}95)$.
5. Pour la fonction carré, on admet que $f'(5) = 10$. Donner une valeur approchée de $5{,}01^2$, puis calculer la valeur exacte.
6. Écrire la fonction affine tangente à la fonction inverse en 1.

Exercice 10 : petites évolutions

1. Une plaque carrée d'aluminium mesure 1 mètre de côté. Chauffée, elle voit son côté passer à $1{,}002$ mètre. Donner une valeur approchée de sa nouvelle aire, puis calculer la valeur exacte.
2. Un prix subit deux hausses successives de $3\,\%$.
   - **a.** Calculer le coefficient multiplicateur global exact.
   - **b.** Quelle valeur approchée donne la formule $(1+h)^2 \approx 1+2h$?
   - **c.** Avec deux hausses de $30\,\%$, comparer la valeur exacte et cette approximation. Que peut-on en conclure ?
3. Un prix augmente de $2\,\%$. À l'aide de $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$, donner une valeur approchée du coefficient multiplicateur qui ramène au prix de départ, et en déduire environ de quel pourcentage il faudrait baisser le nouveau prix.
4. On admet que $(1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3$. Un réservoir cubique a pour arête 1 mètre. Si son arête augmente de $0{,}1\,\%$, de quel pourcentage environ son volume augmente-t-il ?

Leçon 6 : le nombre dérivé en contexte

Exercice 11 : vitesse et débit

Partie A. Depuis un pont, on lâche une petite balle. On admet que la distance parcourue, en mètres, au bout de t secondes est $d(t) = 5t^2$, pour $0 \leq t \leq 3$.

Une solution de BarroTech

1. Calculer la vitesse moyenne de la balle entre $t=1$ et $t=3$.
2. Calculer, pour $h \neq 0$, le taux de variation de d entre 2 et $2+h$.
3. En déduire la vitesse instantanée à l'instant $t=2$, en mètres par seconde, puis en kilomètres par heure.
4. Que représente cette vitesse sur la courbe de d ?

Partie B. On remplit un bassin. On note $V(t)$ le volume d'eau, en litres, au bout de t minutes, et l'on sait que $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vaut 12 à l'instant $t=3$.

1. Donner l'unité de ce nombre, puis l'interpréter.
2. On sait que $V(3) = 30$. Donner une valeur approchée de $V(3{,}5)$.

Exercice 12 : le coût de la planche suivante

Un atelier fabrique des planches à découper. Le coût total, en euros, de q planches est $C(q) = q^2 + 10q + 200$, pour $0 \leq q \leq 50$.

1. Calculer $C(20)$.
2. Calculer le coût de fabrication de la vingt et unième planche.
3. Calculer, pour $h \neq 0$, le taux de variation de C entre 20 et $20 + h$, puis en déduire $C'(20)$.
4. Comparer les résultats des questions 2 et 3. Pourquoi sont-ils proches ?
5. Chaque planche est vendue 60 euros. L'atelier a-t-il intérêt à fabriquer une vingt et unième planche ? Et une trente et unième, sachant que $C'(30) = 70$?

Leçon 7 : les pentes des sécantes en Python

Exercice 13 : lire un programme

On considère le programme suivant.

```
def f(x):
    return x**2 - x

def pente(a, h):
    return (f(a + h) - f(a)) / h

def pentes(a, pas, n):
    liste = []
    for k in range(1, n + 1):
        liste.append(pente(a, k * pas))
    return liste
```

Une solution de BarroTech

1. Calculer à la main ce que renvoie `pentes(2, 1, 3)`.
2. Montrer que, pour $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ vaut $h + 3$. Retrouver ainsi le résultat de la question 1.
3. Que vaut $f'(2)$?
4. Que renverrait `pentes(2, 1, 3)` si la deuxième ligne était `return 3 * x - 1` ? Expliquer.
5. Que se passe-t-il si l'on appelle `pentes(2, 0, 3)` ? Pourquoi ?

Exercice 14 : écrire un programme

On garde les fonctions `f` et `pente` du cours, avec $f(x) = x^2$.

1. Écrire une fonction `pas_decroissants(a)` qui renvoie la liste des pentes `pente(a, p)`, arrondies à six décimales, pour `p` prenant les valeurs `1`, `0.1`, `0.01` et `0.001`.
2. Que renvoie `pas_decroissants(3)` ? Quel nombre retrouve-t-on ?
3. Écrire une fonction `pentes_le_long(a, pas, n)` qui renvoie la liste des pentes des sécantes joignant deux points consécutifs de la courbe, d'abscisses a et $a + \text{pas}$, puis $a + \text{pas}$ et $a + 2\,\text{pas}$, et ainsi de suite, n pentes en tout.
4. Que renvoie `pentes_le_long(0, 1, 5)` ? Comment la courbe se comporte-t-elle quand on avance vers la droite ?

Une solution de BarroTech