Nombre dérivé et tangente

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. **a.** On a $f(1) = 1 - 2 = -1$ et $f(4) = 16 - 8 = 8$. Le taux vaut $\dfrac{8 - (-1)}{4 - 1} = \dfrac{9}{3} = 3$.

   b. $\dfrac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{2} = -\dfrac{1}{8}$.

   c. La fonction k est affine, de coefficient -3 : son taux de variation vaut -3 entre deux nombres quelconques.

   d. $\dfrac{m(3) - m(-3)}{3 - (-3)} = \dfrac{9 - 9}{6} = 0$.
2. Ce résultat ne permet pas de dire que m est constante. Il indique seulement que $m(-3) = m(3)$: un taux n'est qu'une moyenne entre deux points.
3. **a.** $m = \dfrac{10 - 2}{3 - (-1)} = \dfrac{8}{4} = 2$.

   b. $m = \dfrac{7 - 5}{-2 - 2} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.
4. La pente de (AB) est le taux de la question 1.a, soit 3. L'équation réduite s'écrit $y = 3x + p$. Comme A est sur la droite, $-1 = 3 + p$, donc $p = -4$. La sécante a pour équation $y = 3x - 4$.

Exercice 2

1. Entre 0 et 2 : $\dfrac{1{,}8 - 1{,}2}{2} = 0{,}3$. Entre 2 et 4 : $\dfrac{2{,}9 - 1{,}8}{2} = 0{,}55$. Entre 6 et 10 : $\dfrac{3{,}5 - 3{,}3}{4} = 0{,}05$. Ces taux s'expriment en mètres par heure.
2. Le plus grand taux est $0{,}55$: c'est entre 2 et 4 heures que la rivière monte le plus vite, en moyenne.
3. Le taux vaut $\dfrac{1{,}2 - 1{,}2}{24} = 0$. On ne peut pas conclure que la hauteur n'a pas changé : elle a monté jusqu'à $3{,}5$ mètres, puis elle a baissé. Le taux ne compare que le début et la fin de la période.
4. Le taux vaut $\dfrac{1{,}2 - 3{,}5}{24 - 10} = \dfrac{-2{,}3}{14}$, soit environ $-0{,}16$ mètre par heure. Il est négatif : entre 10 et 24 heures, la rivière descend en moyenne.

Exercice 3

On suit les trois temps de la méthode : la différence, la division par h, puis ce que devient le résultat.

1. $f(1) = 2$ et $f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 1 + h = h^2 + 3h + 2$. La différence vaut $h^2 + 3h$, donc le taux vaut $h + 3$. Il se rapproche de 3 : $f'(1) = 3$.
2. $g(2) = -1$ et $g(2+h) = 3 - (4 + 4h + h^2) = -h^2 - 4h - 1$. La différence vaut $-h^2 - 4h$, donc le taux vaut $-h - 4$. Il se rapproche de -4 : $g'(2) = -4$.
3. $k(-1) = 2 + 1 + 1 = 4$ et $k(-1+h) = 2(1 - 2h + h^2) + 1 - h + 1 = 2h^2 - 5h + 4$. La différence vaut $2h^2 - 5h$, donc le taux vaut $2h - 5$. Il se rapproche de -5 : $k'(-1) = -5$.
4. $\ell(4+h) - \ell(4) = \dfrac{1}{4+h} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4 - (4+h)}{4(4+h)} = \dfrac{-h}{4(4+h)}$. Le taux vaut $\dfrac{-1}{4(4+h)}$. Son dénominateur se rapproche de 16 : $\ell'(4) = -\dfrac{1}{16}$.
5. $u(3+h) - u(3) = 5(3+h) - 2 - 13 = 5h$, donc le taux vaut 5, quel que soit h : $u'(3) = 5$. Pour une fonction affine, le nombre dérivé est le coefficient directeur.

Exercice 4

1. Les valeurs se rapprochent de $0{,}25$: on conjecture que le nombre dérivé de la fonction racine carrée en 4 vaut $0{,}25$.
2. $c(2+h) - c(2) = 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8 = 12h + 6h^2 + h^3$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $12 + 6h + h^2$. Il se rapproche de 12 : $c'(2) = 12$.
3. Le quotient n'est pas défini pour $h = 0$: remplacer h par 0 donne $\dfrac{0}{0}$, qui n'a pas de sens. Il faut d'abord simplifier le quotient par h, pour $h \neq 0$, puis regarder de quel nombre le résultat se rapproche quand h se rapproche de 0.
4. Quand h se rapproche de 0, $h^2 - 2h + 4$ se rapproche de 4 : $f'(3) = 4$.

Exercice 5

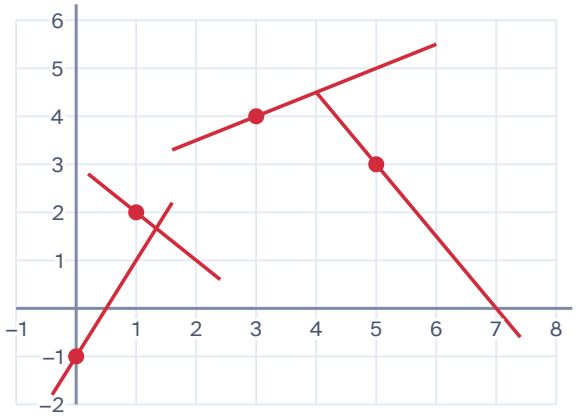
1. On lit $f(-2) = 5$, $f(0) = 3$ et $f(2) = 1$.
2. Aux points A et C, la tangente est horizontale : $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0$. En B, la tangente passe par $(0\,;3)$ et par $(2\,;0)$: on avance de 2, on descend de 3, donc $f'(0) = -\dfrac{3}{2}$.
3. La tangente en B coupe l'axe des ordonnées en 3 et a pour pente $-\dfrac{3}{2}$: son équation réduite est $y = -\dfrac{3}{2}x + 3$.
4. Oui : la tangente horizontale d'équation $y = 1$ recoupe la courbe en un autre point, à gauche. Ce n'est pas une erreur : une tangente peut recouper la courbe. Ce qui la caractérise, c'est son comportement au voisinage du point de contact.

Exercice 6

1. **a.** On place $(0\,;3)$, puis on avance de 1 et on descend de 2 : on arrive en $(1\,;1)$.

   b. Depuis $A(1\,;2)$, on avance de 4 et on monte de 3 : on arrive en $(5\,;5)$.

2. On place chaque point, puis on suit la pente.
   - **a.** Depuis $(0\,;-1)$, on avance de 1, on monte de 2 : on arrive en $(1\,;1)$.
   - **b.** Depuis $(1\,;2)$, on avance de 1, on descend de 1 : on arrive en $(2\,;1)$.
   - **c.** Depuis $(3\,;4)$, on avance de 2, on monte de 1 : on arrive en $(5\,;5)$.
   - **d.** Depuis $(5\,;3)$, on avance de 2, on descend de 3 : on arrive en $(7\,;0)$.



3. Le point de la courbe d'abscisse 2 doit être sur la tangente. Pour $y = 3x - 4$, on trouve $y = 3 \times 2 - 4 = 2$, qui n'est pas égal à $f(2) = 1$: c'est impossible. Pour $y = 3x - 5$, on trouve $y = 3 \times 2 - 5 = 1$: c'est possible, et alors $f'(2) = 3$.

Exercice 7

1. On a $(-2 + h)^2 - 4 = -4h + h^2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $-4 + h$, qui se rapproche de -4 : $f'(-2) = -4$. Comme $f(-2) = 4$, la tangente s'écrit $y = 4 - 4(x + 2)$, soit $y = -4x - 4$.
2. $g(2) = \dfrac{1}{2}$, donc $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x - 2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$, soit $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.
3. **a.** $y = -1 + 2(x - 3)$, soit $y = 2x - 7$.

   b. $y = 4 - \dfrac{1}{2}(x + 2)$, soit $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

   c. $y = 5 - 3(x - 0)$, soit $y = -3x + 5$.

   d. $y = 2 + 0 \times (x - 1)$, soit $y = 2$. La tangente est horizontale.

Exercice 8

1. La tangente a pour coefficient directeur $f'(2) = 4$, donc son équation s'écrit $y = 4x + p$. Le point $A(2\,;3)$ est sur la droite : $3 = 4 \times 2 + p$, donc $p = -5$. La tangente a pour équation $y = 4x - 5$. Avec la formule, $y = 3 + 4(x - 2) = 4x - 5$: on retrouve le même résultat.
2. Le coefficient directeur donne $g'(-1) = 2$. Le point de contact est sur la droite : $g(-1) = 2 \times (-1) + 5 = 3$.
3. **a.** En 1 : $y = 1 + 2(x - 1)$, soit $y = 2x - 1$. En -1 : $y = 1 - 2(x + 1)$, soit $y = -2x - 1$.

   b. On résout $2x - 1 = -2x - 1$, soit $4x = 0$, donc $x = 0$, puis $y = -1$. Les deux tangentes se coupent au point de coordonnées $(0\,;-1)$.

Exercice 9

1. $1{,}003^2 \approx 1 + 2 \times 0{,}003 = 1{,}006$. Ici, $h = -0{,}02$: $0{,}98^2 \approx 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.
2. $\dfrac{1}{1{,}05} \approx 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Ici, $h = -0{,}03$: $\dfrac{1}{0{,}97} \approx 1 + 0{,}03 = 1{,}03$.
3. $\sqrt{1{,}06} \approx 1 + 0{,}5 \times 0{,}06 = 1{,}03$. Ici, $h = -0{,}04$: $\sqrt{0{,}96} \approx 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.
4. $f(3{,}1) \approx 7 + (-2) \times 0{,}1 = 6{,}8$. Ici, $h = -0{,}05$: $f(2{,}95) \approx 7 + (-2) \times (-0{,}05) = 7{,}1$.
5. $5{,}01^2 \approx 25 + 10 \times 0{,}01 = 25{,}1$. La valeur exacte est $25 + 2 \times 5 \times 0{,}01 + 0{,}01^2 = 25{,}1001$.
6. La fonction affine tangente en 1 est $x \mapsto 1 - (x - 1)$, c'est-à-dire $x \mapsto -x + 2$.

Une solution de BarroTech

Exercice 10

1. L'aire vaut $1{,}002^2 \approx 1 + 2 \times 0{,}002 = 1{,}004$ mètre carré. La valeur exacte est $1{,}004004$ mètre carré.
2. **a.** Le coefficient multiplicateur global vaut $1{,}03^2 = 1{,}0609$.

   b. La formule donne $1 + 2 \times 0{,}03 = 1{,}06$, une valeur très proche.

   c. Avec $30\,\%$, la valeur exacte est $1{,}3^2 = 1{,}69$, alors que la formule donne $1{,}6$. L'écart est grand : l'approximation n'est valable que pour h petit.
3. Le coefficient qui ramène au prix de départ est $\dfrac{1}{1{,}02} \approx 1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Il faudrait baisser le nouveau prix d'environ $2\,\%$.
4. Le volume vaut $(1 + h)^3 \approx 1 + 3h$, avec $h = 0{,}001$, soit environ $1{,}003$ mètre cube. Le volume augmente d'environ $0{,}3\,\%$.

Exercice 11

Partie A

1. $d(1) = 5$ et $d(3) = 45$. La vitesse moyenne vaut $\dfrac{45 - 5}{3 - 1} = 20$ mètres par seconde.
2. $d(2 + h) - d(2) = 5(4 + 4h + h^2) - 20 = 20h + 5h^2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $20 + 5h$.
3. Le taux se rapproche de 20 : $d'(2) = 20$. À l'instant $t = 2$, la balle va à 20 mètres par seconde, soit $20 \times 3{,}6 = 72$ kilomètres par heure.
4. Cette vitesse est la pente de la tangente à la courbe de d au point d'abscisse 2.

Partie B

1. L'unité est le litre par minute. À l'instant $t = 3$, le débit vaut 12 litres par minute.
2. Avec $h = 0{,}5$: $V(3{,}5) \approx 30 + 12 \times 0{,}5 = 36$ litres.

Exercice 12

1. $C(20) = 400 + 200 + 200 = 800$ euros.
2. $C(21) = 441 + 210 + 200 = 851$. La vingt et unième planche coûte $851 - 800 = 51$ euros.
3. $C(20 + h) - C(20) = 400 + 40h + h^2 + 200 + 10h + 200 - 800 = h^2 + 50h$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $h + 50$, qui se rapproche de 50 : $C'(20) = 50$.
4. On trouve 51 euros et 50 euros. Ces valeurs sont proches, car l'approximation linéaire avec $h = 1$ donne $C(21) \approx C(20) + C'(20)$.
5. La vingt et unième planche coûte environ 50 euros et rapporte 60 euros : l'atelier a intérêt à la fabriquer. La trente et unième planche coûte environ 70 euros, plus que son prix de vente : l'atelier n'y a pas intérêt.

Exercice 13

1. On a $f(2) = 2$. Avec $h = 1$: $\dfrac{f(3) - 2}{1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$. Avec $h = 2$: $\dfrac{f(4) - 2}{2} = \dfrac{12 - 2}{2} = 5$. Avec $h = 3$: $\dfrac{f(5) - 2}{3} = \dfrac{20 - 2}{3} = 6$. La fonction renvoie `[4.0, 5.0, 6.0]`.
2. $f(2 + h) - f(2) = 4 + 4h + h^2 - 2 - h - 2 = h^2 + 3h$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $h + 3$. Avec $h = 1$, 2 et 3, on retrouve 4, 5 et 6.
3. Le taux se rapproche de 3 : $f'(2) = 3$.
4. Elle renverrait `[3.0, 3.0, 3.0]` : pour une fonction affine, le taux de variation est constant.
5. Le programme s'arrête sur une erreur, une division par zéro (`ZeroDivisionError`), car h vaut alors 0. C'est la condition $h \neq 0$ du cours.

Exercice 14

1. Voici une écriture possible.

```
def pas_decroissants(a):
    return [round(pente(a, p), 6) for p in [1, 0.1, 0.01, 0.001]]
```

2. `pas_decroissants(3)` renvoie `[7.0, 6.1, 6.01, 6.001]`. On retrouve le nombre dérivé en 3 de la fonction carré, qui vaut 6 : le dernier nombre de la liste en est très proche.
3. Voici une écriture possible : à l'étape k, le point de départ a pour abscisse $a + k \times \text{pas}$.

```
def pentes_le_long(a, pas, n):
    return [pente(a + k * pas, pas) for k in range(n)]
```

4. `pentes_le_long(0, 1, 5)` renvoie `[1.0, 3.0, 5.0, 7.0, 9.0]`. Les pentes augmentent quand on avance vers la droite : la courbe est de plus en plus raide.

Une solution de BarroTech