Probabilités conditionnelles et indépendance

INDÉPENDANCE

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée, sauf les programmes de la leçon 10.

Leçon 1 : univers, évènements, probabilités

Exercice 1 : une tombola

Une association vend 20 tickets de tombola, numérotés de 1 à 20. On tire un ticket au hasard. On note A : « le numéro est un multiple de 4 » et B : « le numéro est un multiple de 5 ».

1. Donner l'univers Ω et son cardinal.
2. Écrire A et B en extension, et donner leurs cardinaux.
3. Écrire $A \cap B$ et $A \cup B$ en extension. Quel est le cardinal de $\overline{A}$?
4. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A}\right)$.
5. Calculer $P(A \cup B)$ de deux façons.
6. Vrai ou faux ? Justifier.
   - **a.** $6 \in A$
   - **b.** $\{8\,;12\} \subset A$
   - **c.** A et B sont incompatibles.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : une toupie à cinq faces

Une toupie a cinq faces, numérotées de 1 à 5. Elle suit la loi de probabilité suivante.

Face	1	2	3	4	5
Probabilité	$0{,}1$	$0{,}15$	$0{,}3$	x	$0{,}2$

1. Calculer x.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair, puis celle d'obtenir un numéro impair.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 2, en passant par le contraire.
4. Dans une autre expérience, $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}4$ et $P(C \cap D) = 0{,}2$. Calculer $P(C \cup D)$, puis la probabilité qu'aucun des deux évènements ne soit réalisé.

Leçon 2 : tableau croisé, fréquences marginales et conditionnelles

Exercice 3 : une colonie de vacances

Une colonie accueille 200 enfants, qui choisissent chacun une activité.

	Voile	Équitation	Escalade	Total
8 à 11 ans	30	50	20	100
12 à 15 ans	40	20	40	100
Total	70	70	60	200

1. Donner, en pourcentage, la fréquence marginale des enfants qui font de la voile, puis de ceux qui font de l'escalade.
2. Parmi les 12 à 15 ans, quelle est la proportion d'enfants qui font de l'escalade ?
3. Parmi les enfants qui font de l'escalade, quelle est la proportion de 12 à 15 ans ?
4. Une affiche dit : « $40\,\%$ des enfants de la colonie font de l'escalade. » Est-ce exact ? Corriger la phrase pour la rendre vraie.

Exercice 4 : les arbres d'un parc

Un parc compte 500 arbres : $60\,\%$ sont des feuillus, les autres sont des conifères. On sait que $15\,\%$ des feuillus et $5\,\%$ des conifères ont plus de cent ans.

Une solution de BarroTech

1. Calculer le nombre de feuillus et le nombre de conifères.
2. Recopier et compléter le tableau.

	Plus de cent ans	Cent ans ou moins	Total
Feuillus			
Conifères			
Total			500

3. Quelle est la proportion d'arbres de plus de cent ans dans le parc ?
4. Parmi les arbres de plus de cent ans, quelle est la proportion de feuillus ? Donner une fraction.
5. Calculer, sans le tableau, la proportion de feuillus de plus de cent ans parmi tous les arbres. Vérifier avec le tableau.

Leçon 3 : probabilité conditionnelle

Exercice 5 : calculer avec la définition

1. On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P_A\left(\overline{B}\right)$.
2. On donne $P(A) = 0{,}8$ et $P_A(B) = 0{,}25$. Calculer $P(A \cap B)$.
3. On donne $P_A(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$. Calculer $P(A)$.
4. On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « le résultat est inférieur ou égal à 3 » et B : « le résultat est pair ». Calculer $P(B)$, puis $P_A(B)$. L'information apportée par A change-t-elle la probabilité de B ?

Exercice 6 : un trail

Pour un trail, on relève l'âge des 300 coureurs et leur temps. On choisit un coureur au hasard. On note J : « il a moins de 40 ans » et R : « il a couru en moins de deux heures ».

	J	$\overline{J}$	**Total**
R	90	30	120
$\overline{R}$	60	120	180
Total	150	150	300

1. Calculer $P(J)$, $P(R)$ et $P(J \cap R)$.
2. Calculer $P_J(R)$ avec les effectifs, puis avec la définition.
3. Calculer $P_R(J)$. Traduire ce résultat par une phrase.
4. Calculer $P_{\overline{J}}(R)$. Comparer avec $P_J(R)$ et commenter.

Une solution de BacroTech

Leçon 4 : arbres pondérés

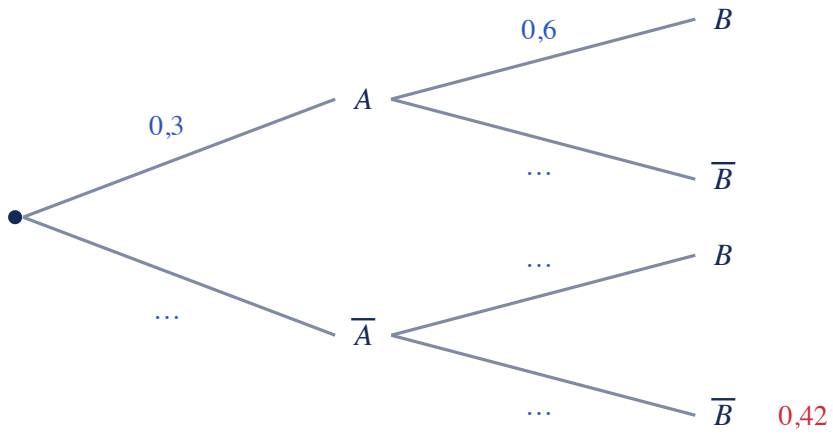
Exercice 7 : le glacier

Chez un glacier, $70\,\%$ des clients choisissent un cornet, les autres un pot. Parmi les clients qui choisissent un cornet, $40\,\%$ prennent de la vanille. Parmi ceux qui choisissent un pot, $20\,\%$ prennent de la vanille. On choisit un client au hasard. On note C : « il choisit un cornet » et V : « il prend de la vanille ».

1. Traduire les données de l'énoncé par des probabilités.
2. Dessiner un arbre pondéré et le compléter.
3. Calculer les probabilités des quatre chemins, et vérifier leur somme.
4. Calculer $P(V)$.
5. Un client a pris de la vanille. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un cornet ? Donner une fraction.

Exercice 8 : un arbre à compléter

On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Le nombre écrit au bout du dernier chemin est la probabilité de ce chemin.



1. Donner $P\left(\overline{A}\right)$ et $P_A\left(\overline{B}\right)$.
2. Calculer $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$, puis $P_{\overline{A}}(B)$.
3. Recopier et compléter l'arbre.
4. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(B)$.

Leçon 5 : trois probabilités à distinguer, faux positifs

Exercice 9 : de la phrase au symbole

Dans un lycée, on choisit un élève au hasard. On note I : « il est interne » et S : « il fait du sport en club ». On lit les quatre phrases suivantes.

- **a.** $20\,\%$ des élèves sont internes.
- **b.** Parmi les internes, $40\,\%$ font du sport en club.
- **c.** $8\,\%$ des élèves sont internes et font du sport en club.
- **d.** $16\,\%$ des élèves qui font du sport en club sont internes.

1. Traduire chaque phrase par une égalité entre une probabilité et un nombre.
2. Montrer que les phrases **a**, **b** et **c** sont cohérentes entre elles.
3. Déduire de **c** et **d** la valeur de $P(S)$.
4. Calculer $P_{\overline{I}}(S)$.

Exercice 10 : un logiciel anti-plagiat

Sur $1\,000$ copies, $10\,\%$ sont plagiées. Un logiciel signale $90\,\%$ des copies plagiées, mais aussi $10\,\%$ des autres. On choisit une copie au hasard. On note C : « la copie est plagiée » et S : « le logiciel la signale ».

1. Recopier et compléter le tableau.

	Signalée	Non signalée	Total
Plagiée			
Non plagiée			
Total			$1\,000$

2. Combien y a-t-il de faux positifs ? de faux négatifs ?
3. Donner la sensibilité et la spécificité du logiciel.
4. Une copie est signalée. Quelle est la probabilité qu'elle soit plagiée ?
5. Dans une autre classe de copies, $1\,\%$ seulement sont plagiées, avec le même logiciel. Reprendre le calcul sur $1\,000$ copies. Que constate-t-on ?

Leçon 6 : partition de l'univers, probabilités totales

Exercice 11 : une station de ski

Une solution de BarroTech

Dans une station, $50\,\%$ des skieurs sont débutants, $30\,\%$ sont de niveau moyen et $20\,\%$ sont experts. La probabilité de tomber dans la journée est de $0{,}4$ pour un débutant, $0{,}2$ pour un skieur moyen et $0{,}1$ pour un expert. On choisit un skieur au hasard. On note D, M, E les trois niveaux et T : « il tombe dans la journée ».

1. Expliquer pourquoi D, M et E forment une partition de l'univers.
2. Dessiner un arbre pondéré.
3. Calculer $P(T)$ avec la formule des probabilités totales.
4. Un skieur est tombé. Quelle est la probabilité que ce soit un débutant ? Donner une fraction.

Exercice 12 : trouver une probabilité manquante

Sur un site de réservation, $40\,\%$ des clients réservent depuis un téléphone. Parmi eux, $70\,\%$ ajoutent une assurance. Au total, $52\,\%$ des clients ajoutent une assurance. On choisit un client au hasard. On note T : « il réserve depuis un téléphone » et A : « il ajoute une assurance ».

1. Donner $P(T)$, $P_T(A)$ et $P(A)$.
2. On note $p = P_{\overline{T}}(A)$. Écrire la formule des probabilités totales, puis calculer p.
3. Traduire le résultat par une phrase.
4. Calculer $P_A(T)$ sous forme d'une fraction.

Leçon 7 : indépendance de deux évènements

Exercice 13 : justifier

1. On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « le résultat est pair », B : « le résultat est inférieur ou égal à 4 » et C : « le résultat est inférieur ou égal à 3 ».
   - **a.** Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
   - **b.** Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
2. Sur 400 personnes, 240 boivent du café, 100 boivent du thé, et 60 boivent les deux. On choisit une personne au hasard ; K : « elle boit du café » et H : « elle boit du thé ». Les évènements K et H sont-ils indépendants ?
3. Même question si 80 personnes boivent les deux, les autres nombres ne changeant pas.

Exercice 14 : utiliser

1. Un hôpital dispose de deux groupes électrogènes. Le premier ne démarre pas avec la probabilité $0{,}02$, le second avec la probabilité $0{,}03$. On suppose ces deux pannes indépendantes.
   - **a.** Calculer la probabilité que les deux groupes ne démarrent pas.
   - **b.** Calculer la probabilité que les deux groupes démarrent.
   - **c.** Calculer la probabilité qu'au moins un groupe démarre.
   - **d.** Citer une situation où l'hypothèse d'indépendance serait fausse.
2. Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$. On note $x = P(B)$. Montrer que $0{,}4 + 0{,}6x = 0{,}7$, puis calculer x.
3. Soient C et D deux évènements incompatibles, de probabilités non nulles. Peuvent-ils être indépendants ? Justifier.

Une solution de BarroTech

Leçon 8 : succession de deux épreuves indépendantes

Exercice 15 : deux dés à quatre faces

On lance deux dés équilibrés à quatre faces, un bleu et un rouge.

1. Combien y a-t-il de couples de résultats ? Quelle est la probabilité de chacun ?
2. Dresser le tableau à double entrée des sommes.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 5.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 6.
5. Calculer la probabilité d'obtenir un double.
6. Calculer la probabilité que le produit des deux résultats soit pair.

Exercice 16 : tableau et arbre

1. Une roue s'arrête sur rouge, bleu ou vert avec les probabilités $0{,}5$, $0{,}3$ et $0{,}2$. Puis on lance une pièce truquée, qui tombe sur pile avec la probabilité $0{,}6$. Les deux épreuves sont indépendantes.
   - **a.** Dresser le tableau des probabilités des six couples.
   - **b.** Quelle est la probabilité d'obtenir rouge ou pile ?
2. Une boîte contient six crayons : quatre verts et deux noirs. On tire deux crayons l'un après l'autre.
   - **a.** Le premier est remis dans la boîte. Dessiner l'arbre. Calculer la probabilité de tirer deux verts, puis celle de tirer deux couleurs différentes.
   - **b.** Le premier n'est pas remis. Dessiner l'arbre et reprendre les deux calculs.
   - **c.** Dans quel cas les tirages sont-ils indépendants ?

Leçon 9 : répétition d'épreuves de Bernoulli

Exercice 17 : une gardienne de but

Une gardienne arrête chaque penalty avec la probabilité $0{,}3$. Elle en affronte trois, et on suppose les tirs indépendants. On appelle succès : « elle arrête le tir ».

1. Pourquoi peut-on parler de répétition d'épreuves de Bernoulli ? Donner n et p.
2. Dessiner l'arbre.
3. Calculer la probabilité qu'elle arrête les trois tirs.
4. Calculer la probabilité qu'elle en arrête exactement un.
5. Calculer la probabilité qu'elle en arrête au moins un.

Une solution de BarroTech

Exercice 18 : quatre réservations

Un restaurant a quatre réservations. Chaque client vient avec la probabilité $0{,}9$, indépendamment des autres. On donne $0{,}9^3 = 0{,}729$ et $0{,}9^4 = 0{,}6561$.

1. Combien de chemins compte l'arbre de cette situation ?
2. Calculer la probabilité que les quatre clients viennent.
3. Calculer la probabilité qu'au moins un client ne vienne pas.
4. Combien de chemins correspondent à exactement trois clients présents ? Calculer la probabilité de cet évènement.
5. Combien de chemins correspondent à exactement deux clients présents ? Calculer la probabilité de cet évènement.

Leçon 10 : Python, la méthode de Monte-Carlo

Exercice 19 : lire et modifier un programme

On considère la fonction suivante.

```
from random import random

def estimation(n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            compteur = compteur + 1
    return 4 * compteur / n
```

1. Que contient la variable `compteur` à la fin de la boucle ?
2. Pourquoi multiplie-t-on par 4 à la dernière ligne ?
3. Sur $10\,000$ points, $7\,850$ sont tombés dans le quart de disque. Quelle estimation du nombre π obtient-on ?
4. On veut estimer l'aire du triangle situé sous la droite d'équation $y = x$, dans le carré. Quelle ligne faut-il modifier, et comment ? Quelle ligne faut-il modifier ensuite pour renvoyer une estimation de l'aire ? Quelle valeur attend-on ?
5. Avec le test `y <= x**3`, sans le facteur 4, un élève obtient $0{,}24925$ pour $n = 100\,000$. Quelle conjecture peut-il faire sur l'aire sous la courbe de la fonction cube entre 0 et 1 ?

Une solution de BarroTech

Exercice 20 : simuler une répétition

On simule les trois tirs du joueur de pétanque de la leçon 9, avec $p = 0{,}6$.

```
from random import random

def succes(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0

def trois_tirs(p):
    return succes(p) + succes(p) + succes(p)

def frequence(n, p):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        if trois_tirs(p) == 2:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n
```

1. Expliquer pourquoi `succes(p)` renvoie 1 avec la probabilité p.
2. Que représente le nombre renvoyé par `trois_tirs(p)` ?
3. Que calcule `frequence(n, p)` ?
4. Un appel `frequence(10000, 0.6)` a renvoyé $0{,}4293$. Comparer avec la probabilité exacte de la leçon 9.
5. Quelle ligne faut-il modifier pour estimer la probabilité d'avoir au moins un succès ? Quelle valeur attend-on ?

solution de BarroTech