Probabilités conditionnelles et indépendance

INDÉPENDANCE

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;\ldots\,;20\}$, et $\text{Card}(\Omega) = 20$.
2. $A = \{4\,;8\,;12\,;16\,;20\}$, donc $\text{Card}(A) = 5$. De même, $B = \{5\,;10\,;15\,;20\}$, donc $\text{Card}(B) = 4$.
3. $A \cap B = \{20\}$ et $A \cup B = \{4\,;5\,;8\,;10\,;12\,;15\,;16\,;20\}$. Le cardinal de $\overline{A}$ est $20 - 5 = 15$.
4. Le tirage se fait au hasard : il y a équiprobabilité. Donc $P(A) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
5. Directement, $P(A \cup B) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$. Avec la formule, $P(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$.
6. **a.** Faux : 6 n'est pas un multiple de 4. **b.** Vrai : 8 et 12 sont des multiples de 4. **c.** Faux : $A \cap B = \{20\}$ n'est pas vide.

Exercice 2

Une solution de BarroTech

1. La somme des probabilités vaut 1, donc $x = 1 - (0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}2) = 0{,}25$.
2. Un numéro pair a pour probabilité $0{,}15 + 0{,}25 = 0{,}4$. Un numéro impair est son contraire : sa probabilité vaut $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
3. Le contraire de « supérieur ou égal à 2 » est « obtenir 1 ». La probabilité cherchée vaut $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
4. On a $P(C \cup D) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$. « Aucun des deux n'est réalisé » est le contraire de $C \cup D$: sa probabilité vaut $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Exercice 3

1. La fréquence marginale de la voile est $\dfrac{70}{200} = 35\,\%$, celle de l'escalade est $\dfrac{60}{200} = 30\,\%$.
2. Parmi les 12 à 15 ans, la proportion d'enfants qui font de l'escalade est $\dfrac{40}{100} = 40\,\%$.
3. Parmi les enfants qui font de l'escalade, la proportion de 12 à 15 ans est $\dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$.
4. L'affiche est inexacte : sur toute la colonie, la proportion est de $30\,\%$. La phrase vraie est : « $40\,\%$ des enfants de 12 à 15 ans font de l'escalade. » *Il faut toujours se demander : parmi qui ?*

Exercice 4

1. Il y a $0{,}6 \times 500 = 300$ feuillus, donc 200 conifères.
2. On calcule $0{,}15 \times 300 = 45$ et $0{,}05 \times 200 = 10$, puis on complète par différence et par somme.

	Plus de cent ans	Cent ans ou moins	Total
Feuillus	45	255	300
Conifères	10	190	200
Total	55	445	500

3. La proportion d'arbres de plus de cent ans est $\dfrac{55}{500} = 11\,\%$.
4. Parmi les arbres de plus de cent ans, la proportion de feuillus est $\dfrac{45}{55} = \dfrac{9}{11}$.
5. Une proportion d'une proportion s'obtient par un produit : $0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$, soit $9\,\%$. Le tableau le confirme : $\dfrac{45}{500} = 9\,\%$.

Exercice 5

1. $P_A(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$, $P_B(A) = \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$ et $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2$.
3. De $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, on déduit $P(A) = \dfrac{0{,}06}{0{,}3} = 0{,}2$.
4. On a $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Sachant A, il reste les issues 1, 2 et 3, dont une seule est paire : $P_A(B) = \dfrac{1}{3}$. L'information change la probabilité de B : elle la fait passer de $\dfrac{1}{2}$ à $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 6

1. $P(J) = \dfrac{150}{300} = 0{,}5$, $P(R) = \dfrac{120}{300} = 0{,}4$ et $P(J \cap R) = \dfrac{90}{300} = 0{,}3$.
2. Avec les effectifs, $P_J(R) = \dfrac{90}{150} = 0{,}6$. Avec la définition, $P_J(R) = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$.
3. $P_R(J) = \dfrac{90}{120} = 0{,}75$. Parmi les coureurs qui ont couru en moins de deux heures, $75\,\%$ ont moins de 40 ans.
4. $P_{\overline{J}}(R) = \dfrac{30}{150} = 0{,}2$. Un coureur de moins de 40 ans a trois fois plus de chances de courir en moins de deux heures qu'un coureur de 40 ans ou plus.

Exercice 7

1. On a $P(C) = 0{,}7$, $P_C(V) = 0{,}4$ et $P_{\overline{C}}(V) = 0{,}2$.
2. Au premier niveau, C a pour probabilité $0{,}7$ et $\overline{C}$ a pour probabilité $0{,}3$. Depuis C, les branches V et $\overline{V}$ portent $0{,}4$ et $0{,}6$. Depuis $\overline{C}$, elles portent $0{,}2$ et $0{,}8$.
3. Les quatre chemins ont pour probabilités $0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$; $0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$; $0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$; $0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$. Leur somme vaut bien 1.
4. Deux chemins mènent à V : $P(V) = 0{,}28 + 0{,}06 = 0{,}34$.
5. $P_V(C) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}34} = \dfrac{14}{17}$.

Exercice 8

1. La somme des branches issues d'un même point vaut 1 : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ et $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
2. Le dernier chemin donne $0{,}7 \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}42$, donc $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = \dfrac{0{,}42}{0{,}7} = 0{,}6$. Par suite, $P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
3. Depuis le départ : A porte $0{,}3$ et $\overline{A}$ porte $0{,}7$. Depuis A : B porte $0{,}6$ et $\overline{B}$ porte $0{,}4$. Depuis $\overline{A}$: B porte $0{,}4$ et $\overline{B}$ porte $0{,}6$.
4. $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$. Deux chemins mènent à B : $P(B) = 0{,}18 + 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46$.

Une solution de BarroTech

Exercice 9

1. **a.** $P(I) = 0{,}2$. **b.** $P_I(S) = 0{,}4$. **c.** $P(I \cap S) = 0{,}08$. **d.** $P_S(I) = 0{,}16$. *Le groupe sur lequel le pourcentage est calculé va en indice.*
2. On a $P(I) \times P_I(S) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08 = P(I \cap S)$: les trois phrases sont cohérentes.
3. De $P_S(I) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(S)}$, on déduit $P(S) = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = 0{,}5$.
4. On a $P\left(\overline{I} \cap S\right) = P(S) - P(I \cap S) = 0{,}5 - 0{,}08 = 0{,}42$ et $P\left(\overline{I}\right) = 0{,}8$. Donc $P_{\overline{I}}(S) = \dfrac{0{,}42}{0{,}8} = 0{,}525$.

Exercice 10

1. Il y a 100 copies plagiées, dont $0{,}9 \times 100 = 90$ sont signalées, et 900 autres, dont $0{,}1 \times 900 = 90$ sont signalées.

	Signalée	Non signalée	Total
Plagiée	90	10	100
Non plagiée	90	810	900
Total	180	820	1 000

2. Les faux positifs sont les copies non plagiées et signalées : il y en a 90. Les faux négatifs sont les copies plagiées et non signalées : il y en a 10.
3. La sensibilité est $P_C(S) = 0{,}9$. La spécificité est $P_{\overline{C}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}9$.
4. $P_S(C) = \dfrac{90}{180} = \dfrac{1}{2}$. Une copie signalée n'a qu'une chance sur deux d'être plagiée.
5. Il y a alors 10 copies plagiées, dont 9 signalées, et 990 autres, dont 99 signalées. Donc $P_S(C) = \dfrac{9}{9+99} = \dfrac{9}{108} = \dfrac{1}{12}$. Quand le plagiat est plus rare, un signalement est beaucoup moins probant : les faux positifs l'emportent largement.

Exercice 11

Une solution de BarroTech

1. Chaque skieur a un niveau, et un seul : D, M et E sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers.
2. Le premier niveau a trois branches, D : $0{,}5$; M : $0{,}3$; E : $0{,}2$. Depuis chaque point partent T et $\overline{T}$: $0{,}4$ et $0{,}6$ depuis D ; $0{,}2$ et $0{,}8$ depuis M ; $0{,}1$ et $0{,}9$ depuis E.
3. D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = 0{,}5 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}28$.
4. $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}28} = \dfrac{20}{28} = \dfrac{5}{7}$.

Exercice 12

1. On a $P(T) = 0{,}4$, $P_T(A) = 0{,}7$ et $P(A) = 0{,}52$.
2. T et $\overline{T}$ forment une partition, donc $P(A) = P(T) \times P_T(A) + P\left(\overline{T}\right) \times p$, soit $0{,}52 = 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}6 \times p = 0{,}28 + 0{,}6p$. Donc $0{,}6p = 0{,}24$ et $p = 0{,}4$.
3. Parmi les clients qui ne réservent pas depuis un téléphone, $40\,\%$ ajoutent une assurance.
4. $P_A(T) = \dfrac{P(T \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}52} = \dfrac{7}{13}$.

Exercice 13

1. **a.** $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $A \cap B = \{2\,;4\}$, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$. Or $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$: A et B sont indépendants.

   b. $P(C) = \dfrac{1}{2}$ et $A \cap C = \{2\}$, donc $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$. Or $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{4}$: A et C ne sont pas indépendants.

2. $P(K) = \dfrac{240}{400} = 0{,}6$, $P(H) = \dfrac{100}{400} = 0{,}25$ et $P(K \cap H) = \dfrac{60}{400} = 0{,}15$. Comme $0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$, les évènements K et H sont indépendants.

3. Cette fois, $P(K \cap H) = \dfrac{80}{400} = 0{,}2$, alors que $P(K) \times P(H) = 0{,}15$: ils ne sont pas indépendants.

Exercice 14

1. **a.** Par indépendance, la probabilité que les deux groupes ne démarrent pas vaut $0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}0006$.

   b. Les contraires sont indépendants aussi : la probabilité que les deux démarrent vaut $0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$.

   c. « Au moins un groupe démarre » est le contraire de « aucun ne démarre » : la probabilité vaut $1 - 0{,}0006 = 0{,}9994$.

   Une solution de BarroTech

   d. Par exemple, si les deux groupes utilisent le même carburant, un carburant de mauvaise qualité les empêche de démarrer tous les deux. *L'indépendance est une hypothèse du modèle.*

2. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}4x$. Donc $P(A \cup B) = 0{,}4 + x - 0{,}4x = 0{,}4 + 0{,}6x$. L'égalité $0{,}4 + 0{,}6x = 0{,}7$ donne $0{,}6x = 0{,}3$, soit $x = 0{,}5$.

3. Non. Comme $C \cap D = \varnothing$, on a $P(C \cap D) = 0$, alors que $P(C) \times P(D) \neq 0$.

Exercice 15

1. Il y a $4 \times 4 = 16$ couples. Les dés sont équilibrés et indépendants : chaque couple a pour probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
2. Le tableau des sommes est le suivant.

bleu \ rouge	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

3. La somme 5 occupe quatre cases : la probabilité vaut $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
4. Six cases contiennent 6, 7 ou 8 : la probabilité vaut $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
5. Il y a quatre doubles : la probabilité vaut $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
6. Le produit est impair seulement si les deux résultats sont impairs, soit $2 \times 2 = 4$ couples sur 16. La probabilité que le produit soit pair vaut donc $1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 16

1. **a.** Dans chaque case, on multiplie les deux probabilités.

	Pile : $0{,}6$	**Face :** $0{,}4$	**Total**
Rouge : $0{,}5$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}5$
Bleu : $0{,}3$	$0{,}18$	$0{,}12$	$0{,}3$
Vert : $0{,}2$	$0{,}12$	$0{,}08$	$0{,}2$
Total	$0{,}6$	$0{,}4$	1

b. On a $P(\text{rouge ou pile}) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}8$.

2. **a.** Avec remise, chaque niveau porte $\frac{2}{3}$ pour vert et $\frac{1}{3}$ pour noir. Deux verts : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Deux couleurs différentes : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

   b. Sans remise, le premier niveau ne change pas. Après un vert, il reste trois verts sur cinq ; après un noir, quatre verts sur cinq. Deux verts : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Deux couleurs différentes : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

   c. Les tirages sont indépendants seulement dans le cas avec remise : la boîte est la même au second tirage.

Exercice 17

1. Chaque tir a deux issues, et les trois tirs sont identiques et indépendants. C'est une répétition d'épreuves de Bernoulli, avec $n = 3$ et $p = 0{,}3$.
2. L'arbre a trois niveaux et huit chemins. Chaque point porte S avec $0{,}3$ et $\overline{S}$ avec $0{,}7$.
3. Un seul chemin convient : $0{,}3^3 = 0{,}027$.
4. Trois chemins contiennent un succès et deux échecs, chacun de probabilité $0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}147$. La probabilité vaut $3 \times 0{,}147 = 0{,}441$.
5. Le contraire est « elle n'arrête aucun tir », de probabilité $0{,}7^3 = 0{,}343$. La probabilité cherchée vaut $1 - 0{,}343 = 0{,}657$.

Exercice 18

1. L'arbre a quatre niveaux, donc $2^4 = 16$ chemins.
2. Un seul chemin convient : $0{,}9^4 = 0{,}6561$.
3. C'est le contraire de l'évènement précédent : $1 - 0{,}6561 = 0{,}3439$.
4. Quatre chemins conviennent, car l'absent peut être l'un des quatre clients. Chacun a pour probabilité $0{,}9^3 \times 0{,}1 = 0{,}0729$. La probabilité vaut $4 \times 0{,}0729 = 0{,}2916$.
5. Six chemins conviennent : les deux absents sont les clients 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 2 et 3, 2 et 4, ou 3 et 4. Chacun a pour probabilité $0{,}9^2 \times 0{,}1^2 = 0{,}0081$. La probabilité vaut $6 \times 0{,}0081 = 0{,}0486$.

Une solution de BarroTech

Exercice 19

1. À la fin de la boucle, `compteur` contient le nombre de points tombés dans le quart de disque.
2. La fréquence de ces points est proche de l'aire du quart de disque, $\dfrac{\pi}{4}$. En la multipliant par 4, on obtient une estimation de π.
3. La fréquence vaut $\dfrac{7\,850}{10\,000} = 0{,}785$, et l'estimation vaut $4 \times 0{,}785 = 3{,}14$.
4. Il faut remplacer le test par `if y <= x:`, puis remplacer la dernière ligne par `return compteur / n`. L'aire du triangle vaut $\dfrac{1}{2}$: on attend une valeur proche de $0{,}5$.
5. Le résultat est proche de $0{,}25$: l'élève peut conjecturer que l'aire vaut $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 20

1. Le nombre `random()` est tiré au hasard entre 0 et 1. Il est inférieur à p avec la probabilité p, et la fonction renvoie alors 1.
2. C'est la somme de trois valeurs égales à 0 ou à 1 : le nombre de succès sur les trois tirs.
3. Elle répète n fois les trois tirs, et renvoie la fréquence des répétitions qui comptent exactement deux succès.
4. La leçon 9 donne la probabilité exacte $0{,}432$. La fréquence $0{,}4293$ en est proche, ce qui est conforme au principe de la simulation.
5. Il faut remplacer le test par `if trois_tirs(p) >= 1:`. On attend une valeur proche de $0{,}936$.

Une solution de BarroTech