Suites arithmétiques et géométriques

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée. Les programmes Python se lisent à la main, et peuvent ensuite être testés.

Leçon 1 : suites arithmétiques

Exercice 1 : reconnaître une suite arithmétique

1. Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique. Si oui, donner sa raison et son premier terme.
   - **a.** $u_n = 4n - 3$
   - **b.** $v_n = n^2 - n$
   - **c.** $w_n = \dfrac{5 - 2n}{3}$
   - **d.** $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = t_n - 7$
   - **e.** $s_0 = 3$ et $s_{n+1} = 2s_n - 1$
   - **f.** $c_n = 6$
2. La suite (u_n) est arithmétique, de raison $2{,}5$, et $u_3 = 4$. Calculer u_4, u_5 et u_2.
3. Trouver le nombre x pour que les trois nombres donnés soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   - **a.** 7 ; x ; 19
   - **b.** -4 ; x ; 10

Exercice 2 : traduire une situation

Partie A. Une fontaine à eau contient 18 litres. Chaque jour, on y prélève $1{,}5$ litre. On note f_n le volume, en litres, au bout de n jours.

1. Calculer f_0, f_1 et f_2.
2. Justifier que la suite (f_n) est arithmétique. Donner sa raison.
3. Pourquoi la raison est-elle négative ?

Partie B. Voici trois relevés. Dire lesquels peuvent être les premiers termes d'une suite arithmétique, et donner alors la raison.

Relevé	Valeurs
Compteur d'un utilitaire (km)	$12\,000$; $12\,035$; $12\,070$; $12\,105$
Abonnés d'un club	$1\,000$; $1\,100$; $1\,210$; $1\,331$
Prix d'un article soldé (en euros)	$4{,}50$; $4{,}20$; $3{,}90$; $3{,}60$

Leçon 2 : terme général d'une suite arithmétique

Exercice 3 : utiliser le terme général

1. La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 7$ et $r = 4$. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{25}.
2. La suite (v_n) est arithmétique, avec $v_1 = -2$ et $r = 3$. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_{40}.
3. La suite (w_n) est arithmétique, avec $w_4 = 11$ et $w_9 = 31$. Calculer sa raison et w_0, puis exprimer w_n en fonction de n.
4. Soit $u_n = 7 + 4n$. Le nombre 135 est-il un terme de cette suite ? Et le nombre 200 ?
5. Soit $t_n = 100 - 6n$. Déterminer le premier rang à partir duquel t_n est strictement négatif.

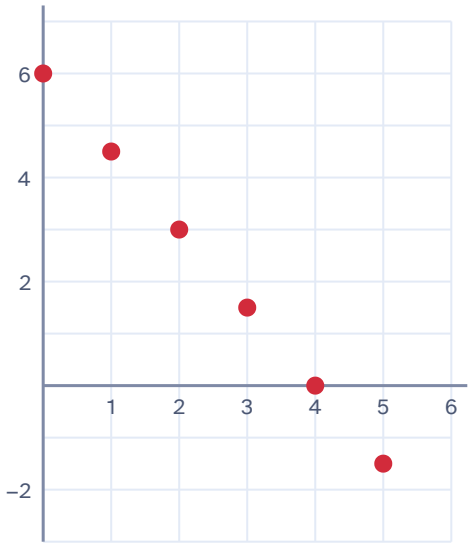
Exercice 4 : un lac, puis un graphique

Partie A. En été, le niveau d'un lac de barrage vaut 850 cm au-dessus d'un repère, et il baisse de 4 cm par jour. On note L_n le niveau, en centimètres, au bout de n jours.

1. Exprimer L_n en fonction de n.
2. Quel est le sens de variation de la suite (L_n) ? Quel était le niveau au bout de 30 jours ?
3. À partir de quel jour le niveau passe-t-il sous 700 cm ?
4. Calculer L_{212} et L_{213}. Que peut-on dire du modèle au-delà ?

Une solution de BarroTech

Partie B. Les points ci-dessous représentent les premiers termes d'une suite arithmétique (u_n).



1. Lire u_0 et la raison r.
2. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{20}.
3. Quel est le sens de variation de la suite ? Conjecturer sa limite.

Leçon 3 : somme des entiers et somme de termes consécutifs

Exercice 5 : calculer des sommes

1. Calculer.
   - **a.** $1 + 2 + \ldots + 30$
   - **b.** $1 + 2 + \ldots + 200$
   - **c.** $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$
   - **d.** $3 + 6 + 9 + \ldots + 60$
2. On pose $S = 7 + 11 + 15 + \ldots + 87$. Combien cette somme a-t-elle de termes ? Calculer S.
3. La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 10$ et $r = -2$. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{15}$.
4. Déterminer l'entier naturel n tel que $1 + 2 + \ldots + n = 210$. *On pourra utiliser le chapitre 1.*

Exercice 6 : des randonnées, puis les nombres impairs

Partie A. Un club prépare un grand trek avec 12 sorties. La première fait 8 km, et chaque sortie fait $1{,}5$ km de plus que la précédente. On note d_n la longueur, en kilomètres, de la sortie numéro n, pour n de 1 à 12.

1. Exprimer d_n en fonction de n, puis calculer d_{12}.
2. Quelle distance totale parcourt-on sur les 12 sorties ?

Partie B. Soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

1. Justifier que I_n est une somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.
2. Montrer que $I_n = n^2$.
3. En déduire la valeur de $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$.

Leçon 4 : suites géométriques

Exercice 7 : reconnaître une suite géométrique

1. Pour chaque suite, dire si elle est géométrique. Si oui, donner sa raison et son premier terme.
   - **a.** $u_n = 5 \times 3^n$
   - **b.** $v_n = 2^n + 1$
   - **c.** $w_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$
   - **d.** $t_n = 4 \times (-1)^n$
   - **e.** $a_0 = 6$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}$
2. La suite (u_n) est géométrique, avec $u_1 = 6$ et $u_2 = 9$. Calculer la raison, puis u_3 et u_0.
3. Chaque liste donne les premiers termes d'une suite. Dire si la suite peut être arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre.
   - **a.** 5 ; 10 ; 15 ; 20
   - **b.** 16 ; 8 ; 4 ; 2
   - **c.** 1 ; 2 ; 6 ; 24

Exercice 8 : taux d'évolution

1. Donner le coefficient multiplicateur.
   - **a.** hausse de $7\,\%$
   - **b.** baisse de $30\,\%$
   - **c.** hausse de $150\,\%$
   - **d.** baisse de $4\,\%$
2. Calculer.
   - **a.** Un prix de 240 euros augmente de $15\,\%$. Quel est le nouveau prix ?
   - **b.** Une masse de 80 kg baisse de $5\,\%$. Quelle est la nouvelle masse ?
   - **c.** Après une hausse de $40\,\%$, un prix vaut 42 euros. Quel était le prix initial ?
3. Calculer le taux d'évolution d'une grandeur qui passe de 50 à 65, puis de 200 à 170.
4. Donner le taux global de chaque enchaînement.
   - **a.** une hausse de $20\,\%$, puis une baisse de $20\,\%$
   - **b.** deux hausses de $10\,\%$
5. Donner le taux réciproque.
   - **a.** d'une baisse de $20\,\%$
   - **b.** d'une hausse de $60\,\%$
6. Un musée reçoit $12\,000$ visiteurs en 2026. On prévoit une hausse de $5\,\%$ par an. On note m_n le nombre de visiteurs en $2026 + n$. Quelle est la nature de la suite (m_n) ? Calculer m_1 et m_2.

Une solution de BarroTech

Leçon 5 : terme général d'une suite géométrique

Exercice 9 : utiliser le terme général

1. La suite (u_n) est géométrique, avec $u_0 = 3$ et $q = 2$. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_6.
2. La suite (v_n) est géométrique, avec $v_1 = 5$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_5.
3. La suite (w_n) est géométrique, à termes réels, avec $w_2 = 12$ et $w_5 = 324$. Calculer sa raison et w_0.
4. Donner le sens de variation de chaque suite, puis conjecturer sa limite éventuelle.
   - **a.** $a_n = 4 \times 1{,}5^n$
   - **b.** $b_n = 7 \times 0{,}8^n$
   - **c.** $c_n = -2 \times 3^n$
   - **d.** $d_n = -5 \times 0{,}5^n$
   - **e.** $e_n = 3 \times (-2)^n$

Exercice 10 : des filtres à eau

Une eau contient 200 mg de polluant par litre. On la fait passer dans des filtres placés à la suite. Chaque filtre retire $40\,\%$ du polluant présent. On note c_n la concentration, en milligrammes par litre, après n filtres.

Une solution de BarroTech

1. Justifier que (c_n) est une suite géométrique. Calculer c_1, c_2 et c_3.
2. Exprimer c_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de cette suite ? Conjecturer sa limite, puis interpréter ce résultat.
4. On veut descendre sous 20 mg par litre. *On donne $0{,}6^4 = 0{,}1296$ et $0{,}6^5 = 0{,}07776$.* Combien de filtres faut-il ?

Leçon 6 : somme de termes d'une suite géométrique

Exercice 11 : calculer des sommes

1. Calculer.
   - **a.** $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^6$
   - **b.** $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$
   - **c.** $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{12}$
   - **d.** $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^6$
2. On pose $S = 2 + 6 + 18 + \ldots + 486$. Combien cette somme a-t-elle de termes ? Calculer S.
3. La suite (u_n) est géométrique, avec $u_0 = 5$ et $q = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_7$.
4. Soit n un entier naturel. On pose $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$. Refaire la démonstration du cours dans ce cas : écrire $2S$, puis calculer $2S - S$.

Exercice 12 : un robot, puis une chaîne de messages

Partie A. Un petit robot, dont la batterie faiblit, parcourt 8 mètres pendant la première minute. Ensuite, à chaque minute, il parcourt la moitié de la distance de la minute précédente. On note d_n la distance parcourue pendant la minute numéro n, pour $n \geq 1$, et $T_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.

1. Exprimer d_n en fonction de n.
2. Montrer que $T_n = 16 - 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. Calculer T_4. Conjecturer la limite de (T_n), puis interpréter ce résultat.

Partie B. Le premier jour, une association prévient 3 personnes. Chaque jour, chaque personne prévenue la veille en prévient 3 nouvelles. Combien de personnes sont prévenues en tout au bout de 6 jours ?

Leçon 7 : modéliser, croissance linéaire ou exponentielle

Exercice 13 : choisir le modèle

1. Pour chaque situation, dire si le modèle est une suite arithmétique, une suite géométrique ou aucune des deux, et donner la raison s'il y en a une.
   - **a.** Un abonnement augmente de 2 euros par an.
   - **b.** Une population de grenouilles baisse de $8\,\%$ par an.
   - **c.** Un compte reçoit 50 euros par mois.
   - **d.** La concentration d'un médicament diminue d'un quart chaque heure.
   - **e.** Une cuve perd $10\,\%$ de son contenu chaque jour, puis reçoit 20 litres.
2. Une association loue un local à $6\,000$ euros la première année. Deux contrats lui sont proposés : A, une hausse de 300 euros par an ; B, une hausse de $4\,\%$ par an. On note a_n et b_n les loyers annuels, en euros, au bout de n années.
   - **a.** Exprimer a_n et b_n en fonction de n. Calculer a_1, a_2, b_1 et b_2.
   - **b.** *On donne* $1{,}04^{10} \approx 1{,}48$ *et* $1{,}04^{20} \approx 2{,}19$. Comparer les deux loyers au bout de 10 ans, puis de 20 ans. Quel contrat conseiller à l'association ?
3. On veut disposer de $2\,601$ euros dans deux ans, sur un placement à $2\,\%$ par an à intérêts composés. Quelle somme faut-il placer aujourd'hui ?

Une solution de BarroTech

Exercice 14 : un traceur en imagerie médicale

Pour un examen, on injecte à un patient un produit radioactif, dont l'activité est de 640 unités. Elle est divisée par deux toutes les six heures. On note a_n l'activité au bout de n périodes de six heures.

1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Quelle est l'activité au bout de 24 heures ?
3. Quel est le sens de variation de la suite (a_n) ? Conjecturer sa limite.
4. Au bout de combien d'heures l'activité vaut-elle 10 unités ?
5. Une personne affirme : « Le produit perd $50\,\%$ en six heures, donc $100\,\%$ en douze heures. » Expliquer son erreur, et donner la baisse réelle en douze heures, en pourcentage.

Leçon 8 : Python, termes, sommes et factorielle

Exercice 15 : termes d'une suite

1. On considère la fonction suivante.

```
def mystere(u0, r, n):
    u = u0
    for k in range(n):
        u = u + r
    return u
```

Une solution de BarroTech

Que renvoie `mystere(5, 2, 3)` ? Que calcule cette fonction ?

2. Recopier et compléter cette fonction, pour qu'elle renvoie le terme de rang n d'une suite géométrique.

```
def terme_geo(u0, q, n):
    u = ...
    for k in range(...):
        u = ...
    return u
```

3. Donner le contenu de `[100 - 5*n for n in range(5)]` et de `[2 * 3**n for n in range(4)]`.
4. Écrire une liste en compréhension qui contient les six premiers termes de la suite $u_n = 1 + 4n$.
5. Que renvoie `seuil(1000)` ? Que représente ce résultat ?

```
def seuil(s):
    n = 0
    u = 100
    while u < s:
        u = 2 * u
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 16 : sommes et factorielle

1. On considère la fonction suivante.

```
def somme_arith(u0, r, n):
    s = 0
    u = u0
    for k in range(n + 1):
        s = s + u
        u = u + r
    return s
```

   Faire tourner à la main `somme_arith(1, 2, 3)`, en donnant les valeurs de `s` et `u` après chaque tour de boucle. Que calcule cette fonction ?

2. Quelle erreur contient cette fonction, écrite pour calculer $1 + 2 + \ldots + n$? Que renvoie-t-elle pour $n = 4$?

```
def somme_fausse(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + k
    return s
```

3. Calculer $6!$ à la main. Écrire une fonction `fact`, qui renvoie la factorielle de n. Pourquoi la variable du produit vaut-elle 1 au départ ?

Une solution de BarroTech

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, $(n+1)! = (n+1) \times n!$. En déduire, sans poser les produits, $\dfrac{7!}{6!}$ et $\dfrac{10!}{8!}$.