# Suites numériques

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

*Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée. Les programmes Python se lisent à la main ; tu peux ensuite les tester sur un ordinateur.*

## Leçon 1 : qu'est-ce qu'une suite ?

### Exercice 1 : calculer des termes

1. Soit $u_n = 2n^2 - n$. Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_5$.
2. Soit $v_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. Calculer $v_0$, $v_1$, $v_3$ et $v_9$. Donner chaque résultat sous forme de fraction simplifiée.
3. Soit $w_n = 5 \times 3^n - 2$. Calculer $w_0$, $w_2$ et $w_4$.
4. Soit $t_n = (-2)^n + n$. Calculer $t_0$, $t_3$ et $t_4$.
5. La suite $(a_n)$ est définie pour $n \geq 1$ par $a_n = 3n - 2$.
   a. Quel est son cinquième terme ?
   b. Quel est le rang du terme égal à $40$ ?

### Exercice 2 : des affiches, puis des notations

Une solution de BarroTech

**Partie A.** Un imprimeur facture $120$ € de frais fixes, puis $0{,}35$ € par affiche. On note $u_n$ le prix, en euros, de $n$ affiches.

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer $u_{100}$ et $u_{1\,000}$.
3. Combien d'affiches obtient-on pour $225$ € ?

**Partie B.** Soit $a_n = n^2 - 2n$. Exprimer en fonction de $n$, sous forme développée et réduite :

1. $a_{n+1}$ ;
2. $a_n + 1$ ;
3. $a_{2n}$ ;
4. $a_{n-1}$, pour $n \geq 1$.

## Leçon 2 : la relation de récurrence

### Exercice 3 : de proche en proche

**Partie A.** Soit $a_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$.

1. Calculer $a_1$, $a_2$ et $a_3$.
2. On conjecture que $a_n = 3^{n+1} + 2$. Vérifier cette formule sur $a_0$, $a_1$, $a_2$ et $a_3$.
3. Montrer que $3\left(3^{n+1} + 2\right) - 4 = 3^{n+2} + 2$. Que vérifie-t-on ainsi ?
4. En admettant la formule, calculer $a_6$.
5. Que se passe-t-il si l'on garde la relation, mais avec $a_0 = 2$ ?

**Partie B.** Soit $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{b_n + 1}$.

1. Calculer $b_1$, $b_2$ et $b_3$ sous forme de fractions.
2. Conjecturer une formule explicite de $b_n$, puis la tester dans la relation.

### Exercice 4 : traduire une situation

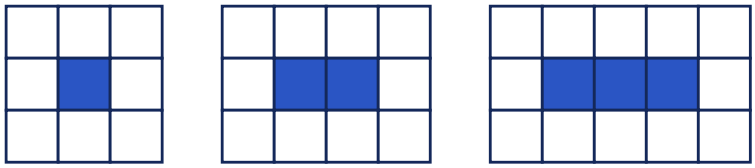
1. Un atelier de poterie dispose de $200$ kg d'argile. Chaque mois, il utilise la moitié de son stock, puis il reçoit une livraison de $30$ kg. On note $p_n$ le stock, en kilogrammes, au bout de $n$ mois.
   a. Justifier que $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 30$, et préciser $p_0$.
   b. Calculer $p_1$, $p_2$ et $p_3$.
2. Écrire une relation de récurrence pour chacune des phrases suivantes.
   a. Chaque année, une chorale perd $12\,\%$ de ses membres et en accueille $50$ nouveaux ($u_n$ : nombre de membres).
   b. Chaque terme est égal au double du précédent, diminué de $3$.
   c. Chaque terme est égal au carré du précédent.
3. Un compte en euros vérifie $s_{n+1} = 1{,}05\,s_n - 20$, où $n$ compte les années. Traduire cette relation par une phrase.

Une solution de BarroTech

# Leçon 3 : motifs et dénombrements

## Exercice 5 : une frise de carrelage

On aligne $n$ dalles bleues carrées, puis on les entoure de dalles blanches de même taille. On note $b_n$ le nombre de dalles blanches. Voici les figures pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.



1. Donner $b_1$, $b_2$ et $b_3$.
2. Que change l'ajout d'une dalle bleue ? En déduire une relation entre $b_{n+1}$ et $b_n$.
3. En comptant les dalles blanches des rangées du haut et du bas, puis celles des deux côtés, montrer que $b_n = 2n + 6$.
4. Calculer $b_{50}$.
5. On dispose de $200$ dalles blanches. Quelle est la longueur de la plus grande frise que l'on peut réaliser ?

## Exercice 6 : les diagonales d'un polygone

Un polygone convexe à $n$ côtés ($n \geq 3$) a $d_n$ diagonales. Une diagonale relie deux sommets qui ne sont pas voisins.

Une solution de BarroTech

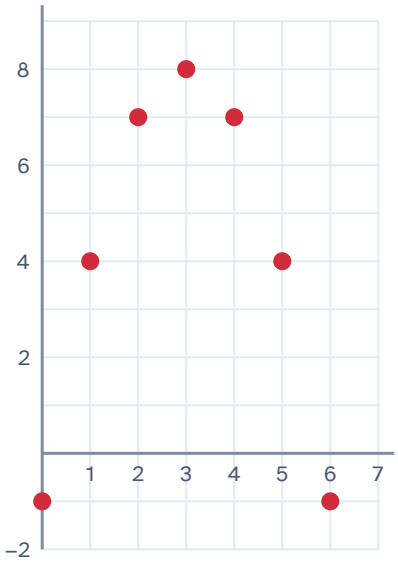
1. Dessiner un quadrilatère, un pentagone et un hexagone, puis donner $d_3$, $d_4$, $d_5$ et $d_6$.
2. De combien de diagonales chaque sommet est-il l'extrémité ? En déduire que $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.
3. Calculer $d_{10}$ et $d_{20}$.
4. Vérifier que $d_{n+1} - d_n = n - 1$.
5. On considère l'algorithme suivant, où $n$ est un entier supérieur ou égal à $4$. Le faire tourner à la main pour $n = 6$. Que calcule-t-il ?

```
d ← 0
Pour k allant de 3 à n - 1
    d ← d + k - 1
Fin Pour
```

## Leçon 4 : représenter une suite

### Exercice 7 : lire un graphique

Une suite $(u_n)$ est représentée par le nuage de points ci-dessous.




1. Lire $u_0$, $u_3$ et $u_5$.
2. Pour quels rangs a-t-on $u_n = 7$ ?
3. Décrire par une phrase comment évoluent les termes.
4. On admet que $u_n = 8 - (n-3)^2$. Calculer $u_{10}$.
5. Pourquoi ne relie-t-on pas les points ?

### Exercice 8 : une construction en escalier

Soit $f(x) = 0{,}5x + 3$. Dans un repère d'unité $1$ cm, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$, pour $x$ entre $0$ et $11$.

1. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Construire $u_1$, $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses, puis les calculer.
2. Faire de même avec $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.
3. Quelle semble être l'évolution de chaque suite ?
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$. Quel lien vois-tu avec la question 3 ?

## Leçon 5 : sens de variation d'une suite

### Exercice 9 : trouver le sens de variation

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes. Quand il n'est atteint qu'à partir d'un certain rang, préciser ce rang.

1. $a_n = 7 - 2n$
2. $b_n = n^2 - 5n$
3. $c_n = \dfrac{n}{n+1}$
4. $d_n = \dfrac{3^n}{n+1}$ (utiliser le quotient)
5. $e_0 = 4$ et $e_{n+1} = e_n - n^2 - 1$

### Exercice 10 : vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier.

1. Si $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.
2. Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.
3. Si $u_n = f(n)$ et si $f$ n'est pas monotone sur $[0\,;+\infty[$, alors $(u_n)$ n'est pas monotone. *On pourra étudier* $u_n = (n-0{,}4)^2$.
4. La suite $v_n = n^2 - 7n$ n'est pas croissante.
5. La négation de « pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$ » est « pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq 0$ ».

Une solution de BarroTech

## Leçon 6 : Python, générer une liste

### Exercice 11 : lire des listes

Sans ordinateur, donner le contenu de la liste `L`.

1. `L = [2 * k + 1 for k in range(5)]`
2. `L = [k**2 for k in range(1, 5)]`
3. `L = [k for k in range(15) if k % 4 == 1]`
4. `L = [k for k in range(1, 21) if k % 2 == 0 and k % 5 == 0]`
5. Pour le programme suivant.

```
L = [2]
for k in range(3):
    L.append(L[k] + 3)
```

6. Avec `L = [1, 3, 5]`, que valent `len(L)` et `L[2]` ? Que se passe-t-il si l'on demande `L[3]` ?

### Exercice 12 : écrire des listes

1. Écrire, en compréhension, la liste des huit premiers termes de la suite $u_n = 3n - 1$. Donner son contenu.
2. Écrire, en compréhension, la liste des multiples de $7$ inférieurs à $50$. Combien contient-elle d'éléments ?
3. Écrire, par ajouts successifs, la liste des six premiers termes de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Donner son contenu.
4. Écrire la liste des entiers de $1$ à $30$ qui sont multiples de $4$ ou de $6$. Donner son contenu.
5. Que devient cette liste si l'on remplace `or` par `and` ? Comment décrire simplement les nombres obtenus ?

---

## Leçon 7 : Python, manipuler et parcourir une liste

### Exercice 13 : suivre une liste

Une nageuse note ses temps, en secondes.

```
T = [52, 48, 50, 47]
T[2] = 49
T.append(46)
del T[0]
T.remove(47)
```

Une solution de BarroTech

1. Donner le contenu de `T` après chaque ligne.
2. Que valent alors `T[1]` et `len(T)` ?
3. Qu'affiche ensuite ce programme ?

```
for i in range(len(T)):
    print(i + 1, T[i])
```

### Exercice 14 : parcourir une liste

1. Voici une fonction.

```
def compte(L, s):
    c = 0
    for x in L:
        if x > s:
            c = c + 1
    return c
```

   a. Que renvoie `compte([12, 0, 7, 25, 3], 5)` ?
   b. Que calcule cette fonction ?

2. Écrire une fonction `minimum(L)` qui renvoie le plus petit élément de la liste `L`.
3. Écrire une fonction `decroissante(L)` qui renvoie `True` si les éléments de `L` sont rangés dans l'ordre décroissant, et `False` sinon.
4. Dans la question 3, pourquoi faut-il écrire `range(len(L) - 1)` et non `range(len(L))` ?
5. Écrire une fonction `indice_max(L)` qui renvoie l'indice du plus grand élément de `L`. Pourquoi une boucle `for x in L` ne convient-elle pas ?

---

## Leçon 8 : Python, suites de Syracuse et de Fibonacci

### Exercice 15 : Syracuse à la main et en Python

BarroTech

1. Écrire à la main la suite de Syracuse qui part de $5$, jusqu'à arriver à $1$. Combien faut-il d'étapes ?
2. Même question en partant de $12$. Quel est le plus grand terme ?
3. Voici une fonction qui utilise la fonction `suivant` de la leçon.

```
def etapes(a):
    n = 0
    while a != 1:
        a = suivant(a)
        n = n + 1
    return n
```

   a. Que renvoie `etapes(5)` ? et `etapes(7)` ?
   b. Pourquoi ne peut-on pas affirmer que cette boucle s'arrête pour tout entier $a > 0$ ?

### Exercice 16 : monter un escalier

Pour monter un escalier de $n$ marches, on avance à chaque pas d'une ou de deux marches. On note $e_n$ le nombre de façons de monter l'escalier.

1. Vérifier que $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ et $e_3 = 3$, en écrivant toutes les façons. Pour $n = 3$, on peut noter $1 + 1 + 1$, $1 + 2$ et $2 + 1$.
2. Pour un escalier de $n + 2$ marches, le premier pas est d'une marche ou de deux marches. En déduire que $e_{n+2} = e_{n+1} + e_n$.
3. Calculer $e_4$, $e_5$ et $e_{10}$.
4. Modifier la fonction `fibonacci` de la leçon pour obtenir une fonction `escalier(n)` qui renvoie la liste $e_1, e_2, \dots, e_n$.

---

## Leçon 9 : l'idée de limite

### Exercice 17 : conjecturer une limite

Pour chaque suite, calculer quelques termes, puis conjecturer sa limite éventuelle.

1. $a_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$ (calculer aussi $a_{99}$)
2. $b_n = 2n - 7$
3. $c_n = 10 - n^2$
4. $d_n = 1 + 2 \times (-1)^n$
5. $e_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ (calculer aussi $e_{99}$ et $e_{100}$, sous forme de fractions)
6. $f_0 = 2$ et $f_{n+1} = \dfrac{1}{f_n}$

Une solution de BarroTech

La suite $(e_n)$ est-elle monotone ? Que peux-tu en conclure ?

### Exercice 18 : le chlore d'un spa

**Partie A.** Chaque jour, $20\,\%$ du chlore d'un spa disparaît, puis on en ajoute $2$ grammes. On note $u_n$ la masse de chlore, en grammes, au bout de $n$ jours, avec $u_0 = 0$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 2$.
2. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
3. Voici un programme, et ce qu'il affiche.

```
L = [0]
for k in range(30):
    L.append(0.8 * L[k] + 2)
print(round(L[10], 2), round(L[20], 2), round(L[30], 2))
```

```
8.93 9.88 9.99
```

Conjecturer la limite de la suite. Expliquer ce nombre à l'aide de la situation.

**Partie B.** On note `F = fibonacci(20)` et `Q = [F[k + 1] / F[k] for k in range(19)]`. Les derniers éléments de `Q`, arrondis à quatre décimales, valent tous $1{,}618$. Que peut-on conjecturer ? Est-ce une démonstration ?

---

## Leçon 10 : l'algorithme de seuil

Une édition de BarroTech

### Exercice 19 : une soupe qui refroidit

Une soupe sort du feu à $80$ degrés. Sa température, en degrés, vérifie chaque minute $T_{n+1} = 0{,}9\,T_n + 2$, avec $T_0 = 80$. Un programme affiche les valeurs suivantes, arrondies au centième.

| $n$ | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 43,25 | 40,92 | 38,83 | 36,95 |

1. Calculer $T_1$ et $T_2$.
2. On veut savoir à partir de quelle minute la soupe est à moins de $40$ degrés. Écrire l'algorithme en langage naturel.
3. Écrire une fonction Python `seuil(s)` qui renvoie le premier rang $n$ tel que $T_n < s$.
4. Que renvoie `seuil(40)` ? Justifier à l'aide du tableau.
5. On admet que la température tend vers $20$ degrés en restant au-dessus. Que se passe-t-il pour `seuil(15)` ?

### Exercice 20 : une fourmilière

Une fourmilière compte $500$ fourmis. Chaque mois, sa population augmente de $20\,\%$, puis $100$ fourmis la rejoignent. On pose $f_0 = 500$ et $f_{n+1} = 1{,}2\,f_n + 100$. Le modèle donne des valeurs décimales, que l'on garde telles quelles.

```
def seuil(s):
    n = 0
    f = 500
    while .......:
        f = 1.2 * f + 100
        n = n + 1
    return n
```

1. Compléter la condition de la boucle pour que `seuil(s)` renvoie le premier rang $n$ tel que $f_n > s$.
2. Faire tourner la fonction à la main pour $s = 1\,000$, en notant $n$, $f$ et le résultat du test à chaque tour.
3. On obtient `seuil(5000)` $= 10$. Quels sont les deux termes qui permettent de contrôler ce résultat ?
4. Un élève écrit `while f > s:`. Que renvoie alors `seuil(1000)` ? Pourquoi ?

Une solution de BarroTech