Équations et fonctions polynômes du second degré

SECOND DEGRÉ

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée.

Leçon 1 : fonction carré et identités remarquables

Exercice 1 : développer et factoriser

1. Développer et réduire.
   - **a.** $(x+4)^2$
   - **b.** $(3x-2)^2$
   - **c.** $(2x+5)(2x-5)$
   - **d.** $(x-1)^2-(x+2)(x-2)$
2. Factoriser.
   - **a.** $x^2-12x+36$
   - **b.** $25x^2-4$
   - **c.** $4x^2+20x+25$
   - **d.** $(x+1)^2-9$
   - **e.** $3x^2-5x$
3. Écrire x^2-7 sous la forme d'un produit. Expliquer pourquoi x^2+9 ne peut pas s'écrire ainsi.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : calcul mental, équations, identités

1. Calculer sans poser l'opération, à l'aide d'une identité remarquable.
   - **a.** 101^2
   - **b.** 99^2
   - **c.** 102×98
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** $x^2 = 49$
   - **b.** $x^2 = 7$
   - **c.** $x^2 + 3 = 0$
   - **d.** $(x-1)^2 = 4$
   - **e.** $(2x+1)^2 = 0$
3. Pour chaque égalité, dire s'il s'agit d'une identité ou d'une équation. S'il s'agit d'une équation, la résoudre.
   - **a.** $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
   - **b.** $(x-2)^2 = x^2 - 4$
   - **c.** $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Leçon 2 : forme factorisée et racines

Une solution de BarroTech

Exercice 3 : racines et formes factorisées

1. Donner les racines de chaque fonction.
   - **a.** $f_1(x) = 3(x-2)(x+5)$
   - **b.** $f_2(x) = (2x-1)(x+4)$
   - **c.** $f_3(x) = -x(x-6)$
   - **d.** $f_4(x) = (3-x)(2x+3)$
2. Développer $f_1(x)$, puis donner les valeurs de a, b et c.
3. Factoriser, puis résoudre dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** $x(x-2) + 3(x-2) = 0$
   - **b.** $(x+1)^2 - 4(x+1) = 0$
4. Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré qui s'annulent en 2 et en -3. Parmi elles, trouver celle qui vaut 12 en 0, et donner sa forme développée.
5. Déterminer la fonction polynôme du second degré qui s'annule en 1 et en 5 et qui vaut 8 en 3.

Exercice 4 : le portail d'une grange

Le portail d'une grange a la forme d'un arc de parabole. Il mesure 6 mètres de large au sol et $4{,}5$ mètres de haut au milieu. On place l'origine du repère au pied gauche : pour x compris entre 0 et 6, la hauteur de l'arc, en mètres, est notée $h(x)$.

1. Justifier que $h(x) = a\,x(x-6)$, où a est un réel non nul.
2. Calculer a.
3. Calculer la hauteur de l'arc à 1 mètre du pied gauche.
4. Une remorque de 2 mètres de large et de $3{,}5$ mètres de haut passe au milieu du portail. Peut-elle passer ?
5. Même question pour une remorque de 4 mètres de large et de $3{,}5$ mètres de haut.

Leçon 3 : signe d'un polynôme sous forme factorisée

Exercice 5 : tableaux de signes

1. Étudier le signe de chaque expression.
   - **a.** $3x - 12$
   - **b.** $-2x + 5$
2. Dresser le tableau de signes de chaque expression.
   - **a.** $f(x) = (x-1)(x+4)$
   - **b.** $g(x) = -3(x-2)(x-5)$
   - **c.** $h(x) = (2-x)(x+3)$
   - **d.** $k(x) = x(2x-3)$
3. En déduire les solutions de $f(x) < 0$ et de $g(x) \geq 0$.

Une solution de BarroTech

Exercice 6 : des planches de skate

Un artisan fabrique des planches de skate. Pour x dizaines de planches vendues, avec $0 \leq x \leq 20$, son bénéfice, en centaines d'euros, est

$$B(x) = -2(x-3)(x-15).$$

1. Calculer $B(0)$ et interpréter ce résultat.
2. Dresser le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;20]$.
3. Pour quels nombres de planches l'artisan fait-il un bénéfice strictement positif ?
4. Calculer son bénéfice pour 90 planches vendues, puis pour 20 planches vendues.

Leçon 4 : somme et produit des racines

Exercice 7 : les racines de tête

1. Trouver de tête les racines de chaque expression, puis la factoriser.
   - **a.** $x^2 - 7x + 10$
   - **b.** $x^2 + 9x + 14$
   - **c.** $x^2 - 2x - 15$
   - **d.** $x^2 + 3x - 28$
   - **e.** $x^2 - 11x + 24$
2. Trouver une racine évidente, en déduire l'autre racine, puis factoriser.
   - **a.** $3x^2 - 2x - 1$
   - **b.** $2x^2 + 7x + 5$
   - **c.** $5x^2 - 7x + 2$

Exercice 8 : choisir sa stratégie

1. Factoriser sans utiliser le discriminant, lorsque c'est possible.
   - **a.** $5x^2 + 20x$
   - **b.** $3x^2 - 27$
   - **c.** $x^2 + 14x + 49$
   - **d.** $x^2 + x - 6$
   - **e.** $2x^2 - 2x - 4$
   - **f.** $x^2 + 9$
2. Le nombre 3 est une racine de $2x^2 - 5x - 3$. Trouver l'autre racine sans résoudre d'équation.
3. On admet que $x^2 - 6x + 4$ a deux racines x_1 et x_2. Sans les calculer, donner $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, puis $x_1^2 + x_2^2$.

Indication : développer $(x_1 + x_2)^2$.

Une solution de BarroTech

Leçon 5 : forme canonique

Exercice 9 : compléter le carré

1. Écrire sous forme canonique.
   - **a.** $x^2 + 4x + 1$
   - **b.** $x^2 - 10x + 20$
   - **c.** $x^2 + 2x + 5$
   - **d.** $x^2 - 3x + 2$
2. Même consigne, en mettant d'abord le coefficient de x^2 en facteur.
   - **a.** $2x^2 + 8x + 3$
   - **b.** $-x^2 + 6x - 4$
   - **c.** $3x^2 - 6x + 7$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide de la forme canonique : $x^2 + 4x + 1 = 0$, puis $x^2 + 2x + 5 = 0$.
4. Un problème à l'ancienne. Résoudre $x^2 + 10x = 39$ en complétant le carré. Pourquoi Al-Khwârizmî n'aurait-il retenu qu'une seule solution ?

Exercice 10 : courbes et extrémums

1. Pour chaque fonction, donner a, α, β, l'extrémum, et dresser le tableau de variations.
   - **a.** $f_1(x) = (x - 3)^2 + 2$ Une solution de BarroTech
   - **b.** $f_2(x) = -(x + 1)^2 + 4$
   - **c.** $f_3(x) = 2(x - 5)^2 - 7$
   - **d.** $f_4(x) = -3x^2 + 6$
2. Soit $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = f(x - 3)$. Développer $g(x)$. Comparer les racines de f et de g. Comment la courbe de g se déduit-elle de celle de f ?
3. La consommation d'une voiture, en litres pour 100 kilomètres, à la vitesse v en kilomètres par heure, avec $40 \leq v \leq 130$, est modélisée par $C(v) = 0{,}001(v - 70)^2 + 4$.
   - **a.** Quelle est la consommation minimale, et à quelle vitesse ?
   - **b.** Calculer $C(90)$ et $C(130)$.
   - **c.** Donner les variations de C sur $[40\,;130]$.

Leçon 6 : discriminant et résolution de l'équation

Exercice 11 : résoudre avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$. Donner les valeurs exactes.

1. $2x^2 + x - 1 = 0$
2. $3x^2 - 2x + 5 = 0$
3. $x^2 - 4x + 4 = 0$
4. $-x^2 + 3x + 10 = 0$
5. $x^2 - 2x - 4 = 0$
6. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
7. $2x^2 - 6x + 3 = 0$
8. $x^2 + x = 1$

Exercice 12 : un jardin, un paramètre, une démonstration

1. Dans un jardin partagé, une pelouse rectangulaire de 8 mètres sur 6 mètres est entourée d'une allée de largeur constante x, en mètres. La pelouse et l'allée occupent ensemble 120 mètres carrés. Montrer que $x^2 + 7x - 18 = 0$, puis trouver la largeur de l'allée.
2. Soit m un paramètre réel. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + mx + 9 = 0$ a-t-elle une seule solution ? Donner cette solution dans chaque cas.
3. Refaire la démonstration du cours sur $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$:
   - **a.** mettre 2 en facteur ;
   - **b.** compléter le carré dans la parenthèse ;
   - **c.** calculer Δ et vérifier que $f(x) = 2\left[(x+1)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$;
   - **d.** en déduire les solutions de $f(x) = 0$.

Une solution de BarroTech

Leçon 7 : factorisation et signe dans le cas général

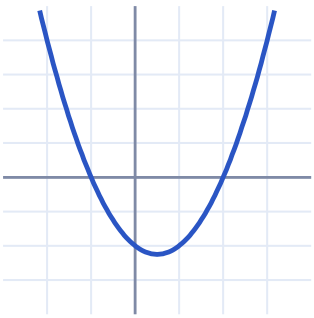
Exercice 13 : factoriser et étudier le signe

Factoriser chaque expression lorsque c'est possible, puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

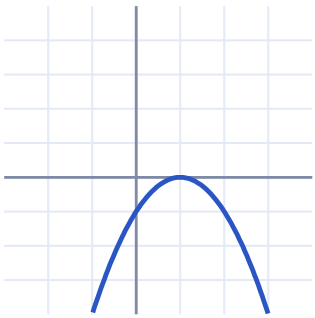
1. $2x^2 - 5x - 3$
2. $-x^2 + 4x - 3$
3. $3x^2 - 6x + 3$
4. $x^2 + 2x + 3$
5. $-2x^2 + x - 1$
6. $x^2 - 2x - 2$

Exercice 14 : lire une parabole, vrai ou faux

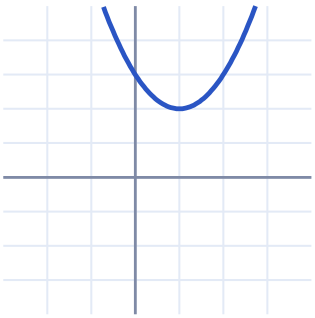
1. Chaque courbe représente une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Donner, pour chacune, le signe de a, le signe de Δ et le signe de c.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

2. Vrai ou faux ? Justifier par une démonstration ou par un contre-exemple. On note $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
   - **a.** Si $\Delta < 0$, alors $f(x) > 0$ pour tout réel x.
   - **b.** Si a et c sont de signes contraires, alors f a deux racines distinctes.
   - **c.** Si f a deux racines distinctes, alors a et c sont de signes contraires.

Leçon 8 : inéquations du second degré

Une solution de BarroTech

Exercice 15 : résoudre des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$
2. $-x^2 + x + 6 < 0$
3. $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$
4. $x^2 + x + 2 > 0$
5. $x^2 + 4x + 4 \leq 0$
6. $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$
7. $x^2 \geq 5x$
8. $x^2 < 9$
9. $3x^2 < 2x + 1$

Exercice 16 : une parabole, une droite, un paramètre

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la courbe de f et $\mathcal{D}$ celle de g.
   - **a.** Factoriser $f(x) - g(x)$.
   - **b.** Trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
   - **c.** Étudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
2. Soit m un paramètre réel. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + mx + 1 = 0$ n'a-t-elle aucune solution ? Que peut-on dire alors du signe de $x^2 + mx + 1$?

Leçon 9 : choisir la forme adaptée

Exercice 17 : trois formes pour une fonction

Soit $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

1. Vérifier que $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$ et que $f(x) = -(x - 4)(x + 2)$.
2. En choisissant chaque fois la forme adaptée, répondre aux questions suivantes.
   - **a.** Calculer $f(0)$.
   - **b.** Résoudre $f(x) = 0$.
   - **c.** Résoudre $f(x) = 8$.
   - **d.** Résoudre $f(x) = 9$.
   - **e.** Résoudre $f(x) \geq 0$.
   - **f.** Donner l'extrémum et les variations de f.
   - **g.** Résoudre $f(x) > 8$.

Une solution de BarroTech

Exercice 18 : la salle de concert

Une salle de concert de 700 places accueille 300 spectateurs quand la place coûte 20 euros. Une étude montre que chaque baisse de 1 euro attire 20 spectateurs de plus. On note x la baisse du prix, en euros, avec $0 \leq x \leq 20$, et $R(x)$ la recette, en euros.

1. Exprimer le prix de la place et le nombre de spectateurs en fonction de x. En déduire que $R(x) = (20 - x)(300 + 20x)$.
2. Développer $R(x)$.
3. Vérifier que $R(x) = -20\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 6125$. Quel prix de la place donne la recette maximale ? Combien y a-t-il alors de spectateurs, et quelle est la recette ?
4. Pour quelles baisses du prix la recette est-elle au moins égale à celle de départ ?
5. Résoudre $R(x) = 0$. Interpréter chaque solution.