Équations et fonctions polynômes du second degré

SECOND DEGRÉ

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. **a.** $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

   b. $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

   c. $(2x+5)(2x-5) = 4x^2 - 25$.

   d. $(x-1)^2 - (x+2)(x-2) = x^2 - 2x + 1 - \left(x^2 - 4\right) = -2x + 5$. *Les parenthèses sont indispensables : on retranche tout le produit.*

2. **a.** $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$.

   b. $25x^2 - 4 = (5x-2)(5x+2)$.

   c. $4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$.

   d. $(x+1)^2 - 9 = (x+1-3)(x+1+3) = (x-2)(x+4)$.

   e. $3x^2 - 5x = x(3x-5)$.

3. Comme $7 = \left(\sqrt{7}\right)^2$, on a $x^2 - 7 = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)$. En revanche, pour tout réel x, $x^2 + 9 \geq 9 > 0$. Cette expression ne s'annule jamais, alors qu'un produit de facteurs du premier degré s'annulerait : elle ne peut donc pas s'écrire ainsi.

Exercice 2

1. **a.** $101^2 = (100+1)^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

   b. $99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$.

   c. $102 \times 98 = (100+2)(100-2) = 10\,000 - 4 = 9996$.

2. **a.** Les solutions sont 7 et -7.

   b. Les solutions sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

   c. L'équation équivaut à $x^2 = -3$. Un carré n'étant jamais négatif, il n'y a pas de solution.

   d. On a $x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$. Les solutions sont 3 et -1.

   e. Un carré est nul si et seulement si le nombre l'est : $2x + 1 = 0$. La solution est $-\dfrac{1}{2}$.

3. **a.** C'est une identité : elle est vraie pour tout réel x.

   b. C'est une équation. Elle équivaut à $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4$, soit $-4x = -8$. La seule solution est 2.

   c. C'est une identité : c'est l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$.

Exercice 3

1. *On applique la règle du produit nul à chaque facteur.* Les racines sont : **a.** 2 et -5 ; **b.** $\dfrac{1}{2}$ et -4 ; **c.** 0 et 6 ; **d.** 3 et $-\dfrac{3}{2}$.
2. $f_1(x) = 3\left(x^2 + 3x - 10\right) = 3x^2 + 9x - 30$. Donc $a = 3$, $b = 9$ et $c = -30$.
3. **a.** Le facteur commun est $x - 2$: l'équation s'écrit $(x-2)(x+3) = 0$. Les solutions sont 2 et -3.

   b. Le facteur commun est $x + 1$: l'équation s'écrit $(x+1)(x+1-4) = 0$, soit $(x+1)(x-3) = 0$. Les solutions sont -1 et 3.
4. Ce sont les fonctions $x \mapsto a(x-2)(x+3)$, avec $a \neq 0$. On a $f(0) = a \times (-2) \times 3 = -6a$. L'équation $-6a = 12$ donne $a = -2$. La fonction cherchée est $f(x) = -2(x-2)(x+3) = -2x^2 - 2x + 12$.
5. On a $f(x) = a(x-1)(x-5)$ et $f(3) = a \times 2 \times (-2) = -4a$. L'équation $-4a = 8$ donne $a = -2$. Donc $f(x) = -2(x-1)(x-5)$.

Exercice 4

1. La hauteur s'annule aux deux pieds, c'est-à-dire en 0 et en 6. La fonction h est du second degré et s'annule en ces deux nombres distincts, donc $h(x) = a(x-0)(x-6) = a\,x(x-6)$, avec $a \neq 0$.
2. Au milieu, $h(3) = 4{,}5$, soit $a \times 3 \times (-3) = 4{,}5$, c'est-à-dire $-9a = 4{,}5$. Donc $a = -\dfrac{1}{2}$.
3. $h(1) = -\dfrac{1}{2} \times 1 \times (-5) = 2{,}5$. La hauteur de l'arc à 1 mètre du pied est de $2{,}5$ mètres.
4. Au milieu du portail, la remorque occupe l'intervalle $[2\,;4]$ en abscisse. On a $h(2) = -\dfrac{1}{2} \times 2 \times (-4) = 4$ et $h(4) = -\dfrac{1}{2} \times 4 \times (-2) = 4$. Entre ces deux abscisses, l'arc est encore plus haut. Comme $4 > 3{,}5$, la remorque passe.
5. Cette remorque occupe l'intervalle $[1\,;5]$. Or $h(1) = 2{,}5 < 3{,}5$: les coins supérieurs toucheraient l'arc, donc elle ne passe pas.

Une solution de BarraTech

Exercice 5

1. **a.** $3x - 12$ s'annule en 4. Son coefficient est positif : l'expression est négative sur $]-\infty\,;4[$ et positive sur $]4\,;+\infty[$.

   b. $-2x + 5$ s'annule en $\dfrac{5}{2}$. Son coefficient est négatif : l'expression est positive sur $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right[$ et négative sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

2. *On applique la règle : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre les racines.*

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour h, on écrit $h(x) = -(x-2)(x+3)$, donc $a = -1$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour k, on écrit $k(x) = 2x\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$, donc $a = 2$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-4\,;1[$, et $g(x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions $[2\,;5]$.

Exercice 6

1. $B(0) = -2 \times (-3) \times (-15) = -90$. Sans aucune vente, l'artisan perd 90 centaines d'euros, soit 9000 euros. Ce sont ses frais fixes.
2. Ici $a = -2$ et les racines sont 3 et 15 :

x	0		3		15		20
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $B(x) > 0$ pour $x \in]3\,;15[$: l'artisan fait un bénéfice strictement positif s'il vend entre 30 et 150 planches, ces deux valeurs étant exclues.
4. Pour 90 planches, $x = 9$: $B(9) = -2 \times 6 \times (-6) = 72$, soit un bénéfice de 7200 euros. Pour 20 planches, $x = 2$: $B(2) = -2 \times (-1) \times (-13) = -26$, soit une perte de 2600 euros.

Exercice 7

1. **a.** Somme 7, produit 10 : les racines sont 2 et 5, et $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.

   b. Somme -9, produit 14 : les racines sont -2 et -7, et $x^2 + 9x + 14 = (x+2)(x+7)$.

   c. Somme 2, produit -15 : les racines sont 5 et -3, et $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$.

   d. Somme -3, produit -28 : les racines sont 4 et -7, et $x^2 + 3x - 28 = (x-4)(x+7)$.

   e. Somme 11, produit 24 : les racines sont 3 et 8, et $x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$.

2. **a.** En 1, on trouve $3 - 2 - 1 = 0$: 1 est racine. Le produit vaut $-\frac{1}{3}$, donc l'autre racine est $-\frac{1}{3}$. Ainsi $3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-1)(3x+1)$.

   b. En -1, on trouve $2 - 7 + 5 = 0$: -1 est racine. Le produit vaut $\frac{5}{2}$, donc l'autre racine est $-\frac{5}{2}$. Ainsi $2x^2 + 7x + 5 = (x+1)(2x+5)$.

   c. En 1, on trouve $5 - 7 + 2 = 0$: 1 est racine. Le produit vaut $\frac{2}{5}$, donc l'autre racine est $\frac{2}{5}$. Ainsi $5x^2 - 7x + 2 = (x-1)(5x-2)$.

Exercice 8

1. **a.** $5x^2 + 20x = 5x(x+4)$.

   b. $3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3(x-3)(x+3)$.

   c. $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$.

   d. Somme -1, produit -6 : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.

   e. $2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2(x-2)(x+1)$.

   f. $x^2 + 9 \geq 9$ pour tout réel x : il n'y a pas de racine, donc pas de factorisation.

2. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$. Si x_2 est l'autre racine, alors $3x_2 = -\frac{3}{2}$, donc $x_2 = -\frac{1}{2}$.

3. $x_1 + x_2 = 6$ et $x_1 x_2 = 4$. En développant, $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, donc $x_1^2 + x_2^2 = 36 - 2 \times 4 = 28$.

Une solution de BarroTech

Exercice 9

1. *On prend la moitié du coefficient de x.*

   a. $x^2+4x+1=(x+2)^2-4+1=(x+2)^2-3$.

   b. $x^2-10x+20=(x-5)^2-25+20=(x-5)^2-5$.

   c. $x^2+2x+5=(x+1)^2-1+5=(x+1)^2+4$.

   d. $x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.

2. **a.** $2x^2+8x+3=2\left(x^2+4x\right)+3=2\left[(x+2)^2-4\right]+3=2(x+2)^2-5$.

   b. $-x^2+6x-4=-\left(x^2-6x\right)-4=-\left[(x-3)^2-9\right]-4=-(x-3)^2+5$.

   c. $3x^2-6x+7=3\left(x^2-2x\right)+7=3\left[(x-1)^2-1\right]+7=3(x-1)^2+4$.

3. $x^2+4x+1=0$ équivaut à $(x+2)^2=3$, soit $x+2=\sqrt{3}$ ou $x+2=-\sqrt{3}$. Les solutions sont $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$.

   $x^2+2x+5=0$ équivaut à $(x+1)^2=-4$: un carré n'étant jamais négatif, il n'y a pas de solution.

4. $x^2+10x=(x+5)^2-25$. L'équation équivaut donc à $(x+5)^2=64$, soit $x+5=8$ ou $x+5=-8$. Les solutions sont 3 et -13. Al-Khwârizmî ne disposait pas des nombres négatifs, et son raisonnement portait sur des longueurs : il n'aurait retenu que 3.

Exercice 10

Une solution de BarroTech

1. **a.** $a=1$, $\alpha=3$, $\beta=2$: minimum 2, atteint en 3. La fonction f_1 est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.

   b. $a=-1$, $\alpha=-1$, $\beta=4$: maximum 4, atteint en -1. La fonction f_2 est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;+\infty[$.

   c. $a=2$, $\alpha=5$, $\beta=-7$: minimum -7, atteint en 5. La fonction f_3 est décroissante sur $]-\infty\,;5]$ et croissante sur $[5\,;+\infty[$.

   d. $a=-3$, $\alpha=0$, $\beta=6$: maximum 6, atteint en 0. La fonction f_4 est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $g(x)=(x-3)^2-2(x-3)=x^2-6x+9-2x+6=x^2-8x+15$. Comme $f(x)=x(x-2)$, les racines de f sont 0 et 2. Comme $g(x)=(x-3)(x-5)$, celles de g sont 3 et 5 : elles sont augmentées de 3. La courbe de g est la courbe de f décalée de 3 unités vers la droite.

3. **a.** Un carré étant positif ou nul, $C(v)\geq 4$, et $C(70)=4$. La consommation minimale est de 4 litres pour 100 kilomètres, à 70 kilomètres par heure.

   b. $C(90)=0{,}001\times 20^2+4=0{,}4+4=4{,}4$ et $C(130)=0{,}001\times 60^2+4=3{,}6+4=7{,}6$.

   c. C est décroissante sur $[40\,;70]$ et croissante sur $[70\,;130]$.

Exercice 11

1. $\Delta = 1 + 8 = 9$. Les solutions sont $\dfrac{-1-3}{4} = -1$ et $\dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\Delta = 4 - 60 = -56 < 0$: il n'y a pas de solution.
3. $\Delta = 16 - 16 = 0$. L'unique solution est $\dfrac{4}{2} = 2$. *On pouvait reconnaître* $(x-2)^2$.
4. $\Delta = 9 + 40 = 49$. Les solutions sont $\dfrac{-3+7}{-2} = -2$ et $\dfrac{-3-7}{-2} = 5$.
5. $\Delta = 4 + 16 = 20$ et $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Les solutions sont $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$.
6. $\Delta = 16 - 16 = 0$. L'unique solution est $-\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$. *On pouvait reconnaître* $(2x+1)^2$.
7. $\Delta = 36 - 24 = 12$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les solutions sont $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{6+2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.
8. L'équation s'écrit $x^2 + x - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 4 = 5$. Les solutions sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 12

1. Le grand rectangle mesure $8 + 2x$ sur $6 + 2x$, car l'allée s'ajoute des deux côtés. On a donc $(8 + 2x)(6 + 2x) = 120$, soit $48 + 28x + 4x^2 = 120$, puis $4x^2 + 28x - 72 = 0$. En divisant par 4, on obtient $x^2 + 7x - 18 = 0$.

   $\Delta = 49 + 72 = 121$. Les solutions sont $\dfrac{-7-11}{2} = -9$ et $\dfrac{-7+11}{2} = 2$. Une largeur étant positive, l'allée mesure 2 mètres de large.

Une solution de BarroTech

2. Il y a une seule solution si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m^2 - 36 = 0$, soit $m = 6$ ou $m = -6$. Pour $m = 6$, l'équation s'écrit $(x+3)^2 = 0$, de solution -3. Pour $m = -6$, elle s'écrit $(x-3)^2 = 0$, de solution 3.
3. **a.** $f(x) = 2\left(x^2 + 2x - 3\right)$.

   b. $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, donc $f(x) = 2\left[(x+1)^2 - 4\right]$.

   c. $\Delta = 16 + 48 = 64$ et $4a^2 = 16$, donc $\dfrac{\Delta}{4a^2} = 4$. On retrouve bien $f(x) = 2\left[(x+1)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

   d. $f(x) = 0$ équivaut à $(x+1)^2 = 4$, soit $x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$. Les solutions sont 1 et -3.

Exercice 13

1. $\Delta = 25 + 24 = 49$. Les racines sont $\frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{5+7}{4} = 3$. Donc $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3)$. Comme $a = 2 > 0$, l'expression est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.
2. 1 est racine évidente, et le produit vaut 3, donc l'autre racine est 3. Ainsi $-x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$. Comme $a = -1 < 0$, l'expression est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.
3. $3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3(x-1)^2$. L'expression est positive pour tout $x \neq 1$ et nulle en 1.
4. $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$: il n'y a pas de factorisation. Comme $a = 1 > 0$, l'expression est strictement positive pour tout réel x.
5. $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$: il n'y a pas de factorisation. Comme $a = -2 < 0$, l'expression est strictement négative pour tout réel x.
6. $\Delta = 4 + 8 = 12$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les racines sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$. Donc $x^2 - 2x - 2 = \left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$. Comme $a = 1 > 0$, l'expression est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

Exercice 14

Une solution de BarroTech

1. *Le sens de la parabole donne le signe de a, le nombre de points communs avec l'axe des abscisses donne le signe de Δ, et l'ordonnée à l'origine vaut c.*

Courbe	Signe de a	Signe de Δ	Signe de c
1	$a > 0$	$\Delta > 0$	$c < 0$
2	$a < 0$	$\Delta = 0$	$c < 0$
3	$a > 0$	$\Delta < 0$	$c > 0$

2. **a.** Faux. Pour $f(x) = -x^2 - 1$, on a $\Delta = -4 < 0$, mais $f(0) = -1 < 0$. Si $\Delta < 0$, $f(x)$ a le signe de a, qui peut être négatif.

   b. Vrai. Si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$. Comme $b^2 \geq 0$, on obtient $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, et f a deux racines distinctes.

   c. Faux. C'est la réciproque de la proposition précédente. Pour $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, il y a deux racines distinctes, 1 et 2, alors que $a = 1$ et $c = 2$ sont de même signe.

Exercice 15

1. Somme 3, produit -4 : les racines sont -1 et 4. Comme $a > 0$, l'expression est négative entre les racines : $S = [-1\,;4]$.
2. Les racines sont -2 et 3. Comme $a = -1 < 0$, l'expression est négative à l'extérieur des racines : $S =]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$.
3. -1 est racine évidente, et le produit vaut $\frac{1}{2}$, donc l'autre racine est $-\frac{1}{2}$. Comme $a > 0$: $S =]-\infty\,;-1] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
4. $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ et $a > 0$: l'expression est toujours strictement positive, donc $S = \mathbb{R}$.
5. L'inéquation s'écrit $(x+2)^2 \leq 0$: un carré n'est négatif ou nul que s'il est nul, donc $S = \{-2\}$.
6. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ et $a < 0$: l'expression est toujours strictement négative, donc $S = \varnothing$.
7. L'inéquation s'écrit $x(x-5) \geq 0$. Les racines sont 0 et 5, et $a > 0$: $S =]-\infty\,;0] \cup [5\,;+\infty[$.
8. L'inéquation s'écrit $(x-3)(x+3) < 0$: $S =]-3\,;3[$.
9. L'inéquation s'écrit $3x^2 - 2x - 1 < 0$. Les racines sont 1 et $-\frac{1}{3}$ (exercice 7), et $a > 0$: $S = \left]-\frac{1}{3}\,;1\right[$.

Exercice 16

1. **a.** $f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$.

   b. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x) - g(x) = 0$, soit -1 et 4. Comme $g(-1) = 0$ et $g(4) = 5$, les points d'intersection sont $(-1\,;0)$ et $(4\,;5)$.

   c. Le signe de $f(x) - g(x)$ est positif à l'extérieur des racines. Donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]4\,;+\infty[$, et en dessous sur $]-1\,;4[$.
2. L'équation n'a aucune solution si et seulement si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m^2 - 4 < 0$, soit $(m-2)(m+2) < 0$, donc $m \in]-2\,;2[$. Dans ce cas, comme $a = 1 > 0$, l'expression $x^2 + mx + 1$ est strictement positive pour tout réel x.

Une solution de BarroTech

Exercice 17

1. $-(x-1)^2+9 = -\left(x^2-2x+1\right)+9 = -x^2+2x+8$ et $-(x-4)(x+2) = -\left(x^2-2x-8\right) = -x^2+2x+8$.
2. **a.** Avec la forme développée : $f(0) = 8$.

   b. Avec la forme factorisée : les solutions sont 4 et -2.

   c. Avec la forme développée : $f(x) = 8$ équivaut à $-x^2+2x = 0$, soit $x(2-x) = 0$. Les solutions sont 0 et 2.

   d. Avec la forme canonique : $f(x) = 9$ équivaut à $(x-1)^2 = 0$. La solution est 1.

   e. Avec la forme factorisée : $a = -1 < 0$, donc l'expression est positive entre les racines, et $S = [-2\,;4]$.

   f. Avec la forme canonique : comme $a < 0$, f admet un maximum égal à 9, atteint en 1. Elle est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

   g. $f(x) > 8$ équivaut à $x(2-x) > 0$. Les racines sont 0 et 2, avec $a = -1 < 0$, donc l'expression est positive entre les racines : $S =]0\,;2[$.

Exercice 18

1. La place coûte $20-x$ euros et il y a $300+20x$ spectateurs. La recette est le produit de ces deux nombres : $R(x) = (20-x)(300+20x)$.
2. $R(x) = 6000+400x-300x-20x^2 = -20x^2+100x+6000$.
3. $-20\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+6125 = -20\left(x^2-5x+\dfrac{25}{4}\right)+6125 = -20x^2+100x-125+6125 = R(x)$.

   Comme $a = -20 < 0$, la recette est maximale pour $x = \dfrac{5}{2}$, soit une baisse de $2{,}50$ euros. La place coûte alors $17{,}50$ euros, il y a 350 spectateurs, et la recette est de 6125 euros.
4. La recette de départ est $R(0) = 6000$ euros. $R(x) \geq 6000$ équivaut à $-20x^2+100x \geq 0$, soit $-20x(x-5) \geq 0$. Comme $a < 0$, l'expression est positive entre les racines 0 et 5. La recette est au moins égale à celle de départ pour une baisse comprise entre 0 et 5 euros.
5. D'après la forme factorisée, les solutions de $R(x) = 0$ sont 20 et -15. Pour $x = 20$, la place est gratuite : la recette est nulle. La valeur -15 n'appartient pas à l'intervalle d'étude : elle correspondrait à une place à 35 euros, pour laquelle le modèle ne prévoit aucun spectateur.